المعادلات التفاضليّة

الجــزء الثــاني

تــأليــف

الأستاذ الدكتور

حسن مصطفى العويضي

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور

عبد الوهاب عباس رجب

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتورة

ســناء علي زارع

رئيسة قسم الرياضيات

كلية التربية للبنات - الرياض

مكتبة الرشد

ناشرون

المحتويات

مقدمة ١١
الباب الأول : نظرية الوجود والوحدوية ....
١- ١ مقدمة ١٥
١- ٢ طريقة بيكارد للتقريب المتتالي ١٥
١- ٣ أستخدام طريقة بيكارد لايجاد حلول نظام تفاضلي ٢٣
١- ٤ وجود حل المعادلة التفاضلية ووحدوية ٢٧
١- ٥ شرط لبشتز ٢٨
١- ٦ نظرية الوجود والوحدوية ٢٨
١- ٧ متباينة جرونويل ٤٣
١- ٨ اعتماد حل مسالة القيمة الابتدائية على الشرط الابتدائي ٤٦
تمارين ٤٩

الباب الثاني الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة ٥١
١ – الأنظمة من المعادلات التفاضلية ٥٢
٢ – الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابته ٦٠
أ – القيم الذاتية حقيقة ومختلفة ٦٢
ب – القيم الذاتية أعداد مركبة ٧٠
ج – القيم الذاتية مكررة ٧٦
٣ – الأنظمة الخطية غير المتجانسة ٨٥
تمارين عامة ٩٠

الباب الثالث : معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة ٩٣
١ – طريقة تغيير البارامترات (الوسائط) ٩٥
٢ – التحويل إلى الصورة القياسية ٩٨
٣ – طريقة تحليل المؤثر ١٠٢
٤- استخدام صيغة ابل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ١٠٣
أولاً : المعادلة المتجانسة ١٠٧
ثانياً : المعادلة غير المتجانسة ١٠٨
٥ – إستبدال المتغير المستقل ١١٢

٦ – المعادلة التامة ١١٢
٧ – المعادلة المتزاملة ١٢٠
٨ – إختزال الرتبة ١٢٣
تمارين ١٢٧

الباب الرابع : حلول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية باستخدام المتسلسلات اللانهائية طريقة فروبنيوس

١ – مقدمة ١٣٣
٢ – طريقة فروبنيوس ١٣٨
الحالة الأولى ١٤١
الحالة الثانية ١٤٤
الحالة الثالثة ١٤٧
حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة قوى x الكبيرة جداً ١٥٦
تمارين ١٦٩

الباب الخامس : معادلة لجيندر التفاضلية ١٧١

١ – مقدمة ١٧٣
٢ – صيغة رودريج ١٧٦
٣ – الصور المختلفة لكثيرة حدود لجيندر ١٧٧
٤ – الدالة المولدة لكثيرات حدود لجيندر ١٧٨
٥ – الخواص الأساسية لكثيرات الحدود ١٧٩
٦ – العلاقة التكرارية لكثيرات حدود لجيندر ١٨٤
٧ – تمارين ١٩٥

الباب السادس : معادلة بسل التفاضلية

١ – مقدمة ١٩٩
٢ – الدالة المولدة لدوال بسل ٢٠١
٣ – العلاقات التكرارية لدوال بسل ٢٠٤
٤ – أمثلة ٢٠٧
٥ – تمارين ٢١٨

المحتويات

الباب السابع : المعادلات التفاضلية الجزئية ٢٢٣

١ – مقدمة ٢٢٣

٢ – أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية ٢٢٤

٣ – تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية ٢٢٤

أولاً : حذف الثوابت الاختيارية ٢٢٩

ثانياً : حذف الدوال الاختيارية ٢٣٢

تمارين ٢٣٥

٤ – المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ٢٣٦

أولاً : الحل التام ٢٣٦

ثانياً : الحل العام ٢٣٧

٥- أمثلة ٢٣٩

تمارين ٢٤٨

٦- تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية ٢٤٩

١- فصل المتغيرات ٢٤٩

٢- استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية ٢٥٤

أ – معادلات الموجه ٢٥٥

ب – معادلات سريان الحرارة (أحادية) البعد ٢٦٦

ج – معادلات لابلاس ٢٦٦

د – معادلة البث ٢٦٧

تمارين ٢٧١

الباب الثامن : متسلسلة فورير ٢٧٣

١- مقدمة ٢٧٥

٢- الدالة الدورية ٢٧٥

٣ – منحنى الدالة الدورية ٢٧٥

٤ – تكامل الدالة الدورية ٢٧٦

٥ – تغيير الدورة ٢٧٦

٦- أنواع خاصة من الدوال الدورية ٢٧٧

أ – الدالة الزوجية ٢٧٧

ب – الدالة الفردية ٢٧٨

ج – دالة زوجية التوافق ٢٧٨

د – دالة فردية التوافق ٢٧٩

٧ – بعض التكاملات الخاصة ٢٧٩
٨ – تبسيط معاملات فورييه ٢٨١
أ – دوال لها خاصية واحدة ٢٨١
(i) الدالة الزوجية ٢٨١
(ii) الدالة الفردية ٢٨١
(iii) دالة زوجية التوافق ٢٨١
(iv) دالة فردية التوافق ٢٨١
ب – دوال لها خاصيتين ٢٨٢
(i) دالة زوجية وزوجية التوافق ٢٨٢
(ii) دالة زوجية وفردية التوافق ٢٨٢
(iii) دالة وفردية التوافق ٢٨٣
(iv) دالة فردية وفردية التوافق ٢٨٣
٨ – أمثلة ٢٨٤
تمارين ٢٩٠

الباب التاسع : مسائل شتورم ليوفيل ٢٩٥
١ – مقدمة ٢٩٧
٢ – أمثلة ٢٩٧
تمارين ٣٠٥

ملحق (دالة جاما – دالة بيتا) ٣٠٧
المراجع ٣١٦

المقدمة

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية . وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقلل من البراهين النظرية والإكثار من الأمثلة دون الإخلال بالدقة العلمية حتى تكون المادة العلمية سهلة المأخذ .

فقد تعرضنا لدراسة وجود الحلول ووحدويتها وإيجاد حلول الأنظمة الخطية ثم أتبعنا بدراسة المعادلات التفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدمين عدة طرائق . هذا بالإضافة إلى دراسة خواص دوال بسل وليجندر . وألحقنا بذلك دراسة مبسطة عن المعاملات التفاضلية الجزئية وأنهينا الكتاب بطريقة حل المعادلات التفاضلية الخطية مستخدما طريقة فروبنيوس .

الباب الأول

نظرية الوجود والوحدوية

Existence and Uniqueness Theorem

الباب الأول

نظرية الوجود و الوحدوية

Existence and Uniqueness Theorem

1 - مقدمة

قد تقابلنا في المسائل الهندسية و الفيزيائية بعض المعادلات التفاضلية غير الخطية التي يتعذر حلها بالطرق المعروفة و لذلك نلجأ لمعرفة وجود الحل من عدمه أو وجود أكثر من حل للمعادلة التفاضلية دون إيجاد الحل نفسه. وقد نلجأ أيضا للطرق العددية للحصول على حل تقريبي لهذه المعادلات.

وفي هذا الباب سوف نناقش طريقة بيكارد (Picard) للتقريب المتتالي لإيجاد حل تقريبي لمسألة القيم الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

يسمى الشرط $y(x_0) = y_0$ بالشرط الإبتدائي وترمز $y(x_0) = y_0$ إلى قيمة y عند $x = x_0$

٢ - طريقة بيكارد للتقريب المتتالي Picard's approximation method

ليكن لدينا مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$$

و بتكامل (1) على الفترة (x_0, x) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds$$

أي

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s,y)\,ds$$

أى أن

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\,ds \tag{2}$$

وبالتالى فإن حل مسألة القيمه الإبتدائية (1) يكون مكافئاً لإيجاد دالة $y(x)$ التى تحقق المعادلة (2) لأنه بتفاضل (2) نحصل على $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وبوضع $x = x_0$ فى (2) نحصل على $y(x_0) = y_0 + 0$ أى $y(x_0) = y_0$. وعلى العكس فقد حصلنا على (2) من (1) بالتكامل على الفترة (x_0, x) ومستخدما الشرط الإبتدائى $y(x_0) = y_0$ وهذا يقودنا إلى النظرية التالية:

نظرية (١):

أى حل لمسألة القيمة الابتدائية (1) يكون حلاً للمعادلة التكاملية (2) وعلى العكس أى حل يحقق المعادلة التكاملية (2) يكون حلاً لمسألة القيمة الابتدائية (1).

وحيث إن التكامل فى الطرف الأيمن من (2) لايمكن الحصول عليه لغياب أى معلومات عن y بدلالة x . وعلى ذلك سوف نلجأ إلى تقريب متتالى لحل المعادلة التكاملية (2) كما يلى.

كتقريب أولى نضع $y = y_0$ فى الدالة المكاملة فى (2) فنحصل على

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,ds \tag{3}$$

حيث $y_1(x)$ هى قيمة $y(x)$ المناظرة وتسمى بالتقريب الأول وهى تقريب أفضل للحل $y(x)$ عند أى x . وللحصول على تقريب أكثر دقة نعوض عن y بالحل بالتقريب الأول y_1 فى الطرف الأيمن من (2) لنحصل على مايسمى بالتقريب الثانى y_2

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds \tag{4}$$

ونستمر في هذه الطريقه حتى الحصول على التقريب النوني y_n وهو

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

وبذلك نحصل على متتابعه من الحلول التقريبيه

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x), \dots$$

مثال (١)

استخدم طريقه بيكارد لحل مسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3, \qquad y(0) = 2 \qquad (1)$$

الحل

لدينا مسألة القيمه الإبتدائية

$$y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y = 2, \ x = 0 \qquad (2)$$

ونعرف ان التقريب النونى لحل مسألة القيمة الإبتدائية هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

وحيث إن

$$f(x, y) = 2y - 2x^2 - 3, \qquad x_0 = 0, y_0 = 2 \qquad (4)$$

ومن (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_0^x (2y_{n-1} - 2s^2 - 3)ds \qquad (5)$$

<u>التقريب الأول</u>: بوضع n=1 في (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_0^x (2y_0 - 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x (4 - 2s^2 - 3)\,ds$$

$$= 2 + \int_0^x (1 - 2s^2)\,ds$$

$$= 2 + \left[s - \frac{2s^3}{3}\right]_0^x = 2 + x - \frac{2x^3}{3} \qquad (6)$$

التقريب الثاني: بوضع n=2 فى (5) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_0^x (2y_1 - 2s^2 - 3)\,ds$$

$$= 2 + \int_0^x \left[2\left\{2 + s - \frac{2s^3}{3}\right\} - 2s^2 - 3\right] ds$$

$$= 2 + \int_0^x \left[1 + 2s - 2s^2 - \frac{4s^3}{3}\right] ds$$

$$= 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \qquad (7)$$

التقريب الثالث:

بوضع n=3 فى (5) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_0^x (2y_2 - 2s^2 - 3)\,ds = 2 + \int_0^x \left[2\left\{2 + s + s^2 - \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3}\right\} - 2s^2 - 3\right] ds$$

$$= 2 + \int_0^x \left[1 + 2s - \frac{4s^3}{3} - \frac{2}{3}s^4\right] ds$$

$$= 2 + x + x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{10}$$

مثال(٢)

استخدم طريقة بيكارد للتقريب المتتالي لإيجاد التقريب الثالث لحل المسألة الإبتدائية .

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2 , y(0) = 0$$

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2 , y(0) = 0 \qquad (1)$$

ونعرف أن التقريب النونى لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

بالمقارنة من (1) ، (2) نجد أن

$$f(x, y) = x + y^2 , x_0 = 0 , y_0 = 0 \qquad (4)$$

ومن المعادلة (3) فإن

$$y_n = \int_0^x [s + y_{n-1}^2(s)]ds \qquad (5)$$

التقريب الأول: بوضع n=1 في (5) فنحصل على

$$y_1 = \int_0^x [s + y_0^2]ds = \int_0^x sds = \frac{1}{2}x^2 \qquad (6)$$

التقريب الثاني: بوضع n=2 في (5) ونستخدم (6) فنحصل على

$$y_2 = \int_0^x [s + y_1^2] ds = \int_0^x [s + \frac{s^4}{4}] ds = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 \qquad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع $n=3$ فى ونستخدم (7) نحصل على

$$y_3 = \int_0^x [s + y_2^2] ds$$

$$= \int_0^x \left[s + (\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{20}s^5)^2 \right] ds = \int_0^x [s + \frac{s^4}{4} + \frac{s^{10}}{400} + \frac{1}{20}s^7] ds$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4400}x^{11} + \frac{1}{160}x^8$$

مثال (٢)

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلة التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} = 2 - (\frac{y}{x}) \qquad (1)$$

باستخدام طريقة بيكارد حيث $y(1) = 2$

الحل :

نعرف ان التقريب النونى y_n لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \qquad (3)$$

بمقارنة من (1) ، (2) نجد ان

$$x_0 = 1, y_0 = 2, f(x, y) = 2 - (\frac{y}{x}) \qquad (4)$$

من (3) نحصل على

$$y_n = 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{s} y_{n-1}] ds \qquad (5)$$

التقريب الأول: بوضع n=1 في (5) نحصل على

$$y_1 = 2 + \int_1^x [2 - (\frac{1}{s}) y_0] ds = 2 + \int_1^x [2 - (\frac{2}{s})] ds \qquad (6)$$

$$= 2 + [2 - 2\ln s]_1^x = 2 + 2x - 2\ln x - 2 = 2x - 2\ln x$$

التقريب الثاني: بوضع n=2 في (5) وباستخدام (6) نحصل على

$$y_2 = 2 + \int_1^x [2 - \frac{y_1}{s}] ds = 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{s}(2s - 2\ln s)] ds$$

$$= 2 + 2\int_1^x \ln s \cdot \frac{1}{s} ds = [2 + (\ln s)^2]_1^x = 2 + \ln^2 x \qquad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع n=3 في (5) وباستخدام (7) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_1^x \left[2 - \frac{1}{s} y_2\right] ds$$

$$= 2 + \int_1^x [2 - \frac{1}{s}(2 + \ln^2 s)] ds = 2 + 2x - 2\ln x - (1/3)\ln^3 x - 2$$

$$= 2x - 2\ln x - \frac{1}{3}\ln^3 x.$$

مثال (4)

إستخدم طريقه بيكارد لإيجاد حل مسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \; y(0) = 2$$

واثبت ان الحل التقريبي يقترب من الحل التام(exact)

الحل

لدينا

$$\frac{dy}{dx}=y-x\,,\;y(0)=2 \qquad (1)$$

ونعرف أن التقريب النوني لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\;y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

يعطى بالعلاقة

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_{n-1}(s))ds \qquad (3)$$

بمقارنة (1) ، (2) نجد أن

$$f(x,y)=y-x\,,\;x_0=0\,,\;y_0=2 \qquad (4)$$

و من (3) نجد أن

$$y_n=2+\int_0^x[y_{n-1}-s]ds \qquad (5)$$

التقريب الأول: بوضع n=1 فى (5) وباستخدام (4) نحصل على

$$y_1=2+\int_0^x[y_0-s]ds=2+\int_0^x[2-s]ds=2+2x-\frac{1}{2}x^2 \qquad (6)$$

التقريب الثانى: بوضع n=2 فى (5) وباستخدام (6) نحصل على

$$y_2=2+\int_0^x[y_1-s]ds=2+\int_0^x[2+2s-\frac{1}{2}s^2-s]ds=2+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3 \qquad (7)$$

التقريب الثالث: بوضع n=3 فى (5) وباستخدام (7) نحصل على

$$y_3 = 2 + \int_0^x [y_2 - s]ds = 2 + \int_0^x [2 + 2s + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s^3 - s]ds$$

$$= 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \qquad (8)$$

للحصول على الحل التام للمعادلة (1) حيث

$$\frac{dy}{dx} - y = -x \qquad (9)$$

وهى معادلة خطيه ويكون معامل التكامل هو e^{-x} وبالتالى يكون حلها هو

$$ye^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + c$$

اى

$$y = x + 1 + ce^{x} \qquad (10)$$

وحيث أن $x = 0, y = 2$ وباستخدام (10) نجد أن $c = 1$ وبذلك يكون الحل التام هو

$$y = x + 1 + e^{x} \qquad (11)$$

ونعرف أن

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (12)$$

ومن (8) ، (12) نجد أن الحل التقريبى يؤول الى

$$y = 1 + x + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$y = 1 + x + e^{x}$$

<u>٢ - استخدام طريقة بيكارد التقريبيه لايجاد حلول نظام تفاضلى:</u>

ليكن لدينا

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,y,z)\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,y,z),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

وكانت $y=y_0, z=z_0$ عندما $x=x_0$ والتقريب النوني (y_n, z_n) لمسألة القيمة الحدية (1) تعطى بالعلاقه

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}, z_{n-1})\,ds \qquad (2)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}, z_{n-1})\,ds \qquad (3)$$

مثال: -

أوجد التقريب الثالث لحل المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0$$

مستخدما طريقه بيكارد

الحل :

لدينا

$$\frac{dy}{dx} = z, \frac{dz}{dx} = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0 \qquad (1)$$

ونعرف أن التقريب النوني (y_n, z_n) لمسألة القيمه الإبتدائية

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,y,z)\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,y,z)\end{aligned} \qquad (2)$$

وأن $y=y_0, z=z_0$ عندما $x=x_0$ يعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (3)$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(x, y_{n-1}, z_{n-1})ds \qquad (4)$$

وبمقارنه (1) ، (2) يكون لدينا

$$f(x,y,z) = z, g(x,y,z) = x^3(y+z), y_0 = 1, z_0 = 1/2, x_0 = 0 \qquad (5)$$

من (3) نجد أن

$$y_n = 1 + \int_0^x z_{n-1} ds \qquad (6)$$

ومن (4) نجد أن

$$z_n = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_{n-1} + z_{n-1})ds \qquad (7)$$

التقريب الأول:

بوضع n=1 فى (6) وباستخدام (5) نحصل على

$$y_1 = 1 + \int_0^x z_0 ds = 1 + \int_0^x \frac{1}{2} ds = 1 + \frac{1}{2}x \qquad (8)$$

بوضع n=1 فى (7) وإستخدام (5) نحصل على

$$z_1 = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(y_0 + z_0)ds = \frac{1}{2} + \int_0^x s^3(1 + \frac{1}{2})ds = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} \qquad (9)$$

التقريب الثانى: بوضع n=2 فى (6) وإستخدام (9) نحصل على

$$y_2 = 1 + \int_0^x z_1 ds = 1 + \int_0^x (\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4)ds = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3x^5}{40} \qquad (10)$$

وكذلك بوضع n=2 فى (7) وإستخدام (8) ، (9) نحصل على

$$z_2=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(y_1+z_1)ds=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(1+\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}s^4)ds$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{3}{64}x^8 \qquad (11)$$

التقريب الثالث: بوضع n=3 فى (6) وإستخدام (11) نحصل على

$$y_3=1+\int_0^x z_2 ds=1+\int_0^x(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}s^4+\frac{1}{10}s^5+\frac{3}{64}s^8)ds=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{40}x^5+\frac{1}{60}x^6+\frac{1}{192}x^9$$

وكذلك بوضع n=3 فى (7) وإستخدام (10)، (11) نحصل على

$$z_3=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3(y_2+z_2)ds=\frac{1}{2}+\int_0^x s^3[1+\frac{s}{2}+\frac{3s^5}{40}+\frac{1}{2}+\frac{3s^4}{8}+\frac{s^5}{10}+\frac{3s^8}{64}]ds$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{3}{64}x^8+\frac{7}{360}x^9+\frac{1}{256}x^{12}$$

مثال (٦)

أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^3(y+\frac{dy}{dx}),\ y=1,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2},\ x=0$$

الحل:

لدينا

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^3(y+\frac{dy}{dx}),\ y=1,\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2},x=0 \qquad (1)$$

وبوضع $\frac{dy}{dx}=z$ فيكون $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$ وعلى ذلك فإن:

$$\frac{dy}{dx}=z,\frac{dz}{dx}=x^3(y+z),\ y=1,z=\frac{1}{2},x=0 \qquad (2)$$

وتؤول المسأله إلى المثال رقم (٥) السابق.

4 - وجود حل المعادلة التفاضلية ووحدويته :

ليكن لدينا مسألة القيمه الإبتدائية

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| = 0,\ y(0) = 1 \qquad (1)$$

وليكن $y \neq 0$ وبالقسمة على $|y|$ وبالتكامل نحصل على تناقض وبالتالي فإن $y = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضليه ولكن هذا الحل لايحقق الشرط الإبتدائي $y(0) = 1$ وبالتالي فإن مسألة القيمة الإبتدائية (1) ليس لها حل على الإطلاق.

ونعتبر الآن مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x,\ y(0) = 1 \qquad (2)$$

وبالتكامل نحصل على حل لها وهو $y = \frac{1}{2}x^2 + c$ حيث c ثابت إختياري وبإستخدام الشرط الإبتدائي $y(0) = 1$ أي عندما $x = 0$ تكون $y = 1$ نحصل على $c = 1$ وبالتالي يكون حل مسألة القيمة الإبتدائية هو $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

وأخيرا اعتبر مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)}{x},\ y(0) = 1 \qquad (3)$$

الذي يكون حلها هو $y = 1 + xc$

وبإستخدام الشرط الإبتدائي $y(0) = 1$ نرى أنه لايمكن تحديد قيمة c وبالتالي فإن مسألة القيمة الإبتدائية المعطاه لها عدد لانهائي من الحلول معطاه بالعلاقه $y - 1 = xc$ حيث c ثابت إختياري

هذا الجدل يقودنا إلى أن مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

قد يكون لها حل وحيد ، أو أكثر من حل ، أو لا يوجد لها حل على الإطلاق وهذا يقودنا إلى الأسئلة الأساسية التالية : -

أ - وجود الحل (existence) تحت أي الشروط يكون لمسألة القيمة الإبتدائية (4) لها حل واحد على الأقل؟

ب - وحدوية الحل (uniqueness) : تحت أي الشروط يكون لمسألة القيمة الإبتدائية (4) حل واحد ؟

تسمى النظرية التي تحوي هذه الشروط بنظرية الوجود ونظرية الوحدوية على الترتيب

٥ - شرط ليبشتز Lipschitz condition :

يقال ان الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز في المنطقة D في المستوى xy إذا وجد ثابت $K>0$ بحيث إن

$$\left|f(x,y_2)-f(x,y_1)\right|\le K\left|y_2-y_1\right|$$

حيث إن النقطتين $(x,y_1),(x,y_2)$ تقعان في المنطقه D . ويسمى الثابت K بثابت ليبشتز للدالة $f(x,y)$.

٦ - نظرية الوجود والوحدوية

نظرية (٢)

لتكن دالة $f(x,y)$ متصلة في النطاق D من المستوى xy ، وأن M ثابت بحيث

$$\left|f(x,y)\right|\le M\,,(x,y)\in D \tag{1}$$

وتحقق شرط ليبشتز في y أي

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le K\left|y_1-y_2\right| \tag{2}$$

حيث K ثابت لايعتمد على x, y_1, y_2 .

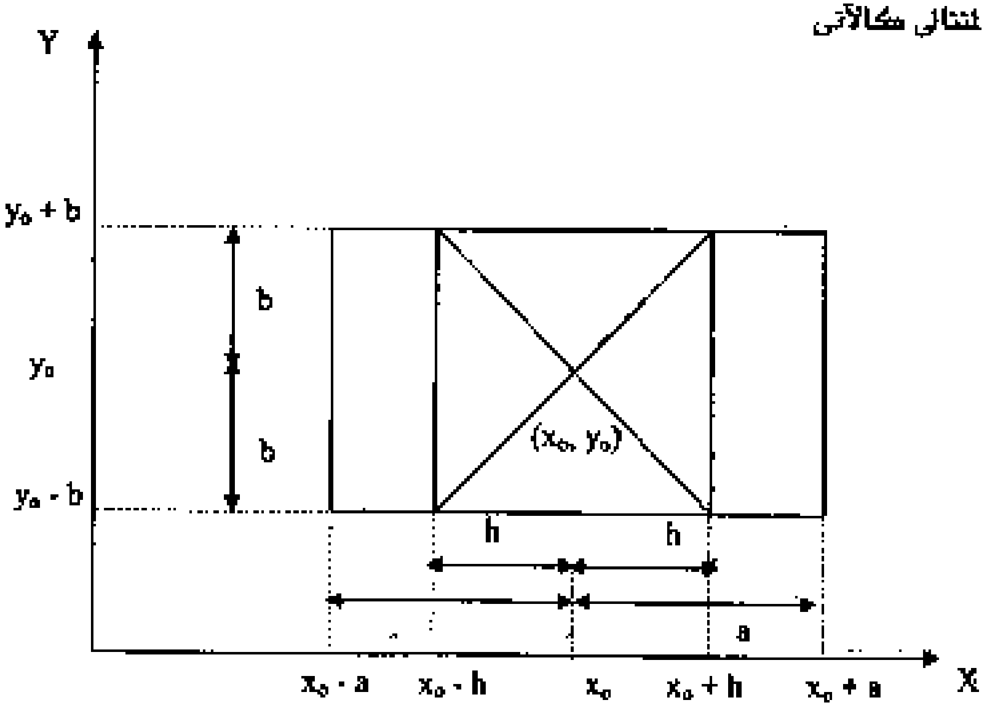
ليكن R هو المستطيل المعرف بالعلاقه

$$|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b \tag{3}$$

يقع في D حيث $Mh < b, h = \min(a, b/M)$ فإن المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ لها حل وحيد $y = y(x)$ حيث $y(x_0) = y_0$ لكل $|x - x_0| \le h$.

البرهان:

سوف نثبت هذه النظرية بإستخدام طريقة بيكارد للتقارب المتتالي. ليكن x بحيث $|x - x_0| \le h$. فإننا نعرف متتابعة الدوال $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ وتسمى التقريب المتتالي كالآتي



$$
\left.\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,ds\\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1)\,ds\\
&\text{-------------------}\\
y_{n-1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-2})\,ds\\
y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})\,ds
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

سوف نقسم البرهان إلى خمس خطوات رئيسية: -

الخطوة الأولى:

سوف نثبت لكل $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ أن المنحنى $y = y_n(x)$ يقع داخل R أى أن $y_0 - b < y < y_0 + b$ والآن

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,ds\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)|\,|ds|$$

أى

$$|y_1 - y_0| \le M\,|x - x_0| \le Mh < b$$

باستخدام (1) ، (3) ، هذا يبرهن النظرية عندما n=1

نفرض أن $y = y_{n-1}(x)$ تقع في R وبالتالي تكون $f(x, y_{n-1}(x))$ معرفه ومتصله وتحقق $|f(x, y_{n-1}(x))| \le M$ على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$.

نحصل من (4) على

$$|y_n - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1})ds\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1})||ds| \le M|x - x_0| \le Mh < b$$

كما سبق ، والتي تثبت ان $y_n(x)$ تقع في R وبالتالي $f(x, y_n)$ معرفه ومتصله على $[x_0 - h, x_0 + h]$ وهذا يبين النتيجه المطلوبه محققه لكل n بالإستنتاج الرياضي

الخطوة الثانية:

سوف نثبت بالإستنتاج الرياضي أن

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MK^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \tag{5}$$

سبق ان اثبتنا صحة (5) عندما n=1 في الخطوه الأولى حيث اثبتنا $|y_1 - y_0| \le M|x - x_0|$. نفرض ان المتباينه (5) صحيحة عند n-1 بدلا من n ، أى أن

$$|y_{n-1} - y_{n-2}| \le \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1} \tag{6}$$

فيكون لدينا

$$|y_n - y_{n-1}| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})\}ds\right|$$

أى

$$|y_n - y_{n-1}| = \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}) - f(s, y_{n-2})||ds| \tag{7}$$

و باستخدام شرط ليبشتز (2) نجد أن

$$|f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2})| \le K|y_{n-1} - y_{n-2}| \tag{8}$$

ومن (7) ، (8) نحصل على

$$|y_n - y_{n-1}| \le \int_{x_0}^{x} K|y_{n-1} - y_{n-2}||dx| \le K.\frac{MK^{n-1}}{(n-1)!}.\frac{|x-x_0|^n}{n}$$

باستخدام (6)

وبذلك تكون المتباينه (5) صحيحة باستخدام الإستنتاج الرياضي

الخطوة الثالثة:

سوف نثبت ان المتتابعه $\{y_n\}$ تتقارب بإنتظام إلى نهاية لكل $x_0 - h \le x \le x_0 + h$.

من الخطوة الثانية

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MK^{n-1}h^n}{n!},$$

لكل قيم n حيث $|x - x_0| \le h$، وباستخدام ذلك فإن المتسلسله اللانهائيه

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

$$\le y_0 + Mh + \frac{1}{2!}MKh^2 + \dots + \frac{1}{n!}MK^{n-1}h^n + \dots$$

$$\le y_0 + \frac{M}{K}[e^{Kh} - 1]$$

وهي تقاربيه لكل قيم M, h, K وبالتالي تكون المتسلسله (9) تقاربيه بإنتظام على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$. وحيث ان الحدود في (9) هي دوال متصله في x ويكون مجموعها مساويا

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \qquad (10)$$

(مثلا لان $[y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})]$

والذي يجب ان يكون متصلا

الخطوة الرابعة :

سوف نثبت أن $y = y(x)$ يحقق المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ وحيث إن $y_n(x)$ تؤول بانتظام إلى $y(x)$ في الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$

وباستخدام شرط لبشتز

$$|f(x, y) - f(x, y_n)| \le K|y - y_n|$$

الذي يبين أن $f(x, y_n)$ تؤول بانتظام إلى $f(x, y(x))$

ويكون لدينا من (4)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

او

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

وحيث إن المتتابعة $\{f(x, y_n(x))\}$ ،والتي تتكون من دوال متصلة على الفترة المعطاة تتقارب بانتظام إلى $f(x, y(x))$ على نفس الفترة وباستخدام (10)نحصل على

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(x, y_{n-1}(x))dx$$

أي

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{11}$$

والدالة المكاملة في الطرف الأيمن من (11) دالة متصلة في x وبالتالي فإن التكامل يكون له مشتقة. وعلى ذلك فإن دالة النهاية $y(x)$تحقق المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$، على الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$ بحيث $y(x_0) = y_0$.

وبذلك فإن الخطوات الأربع السابقة تثبت وجود حل مسألة القيمة الإبتدائية.

الخطوة الخامسة:

سوف نثبت ان الحل $y = y(x)$ هو الحل الوحيد الذي يحقق $y(x_0) = y_0$.

نفرض أن $y = Y(x)$ مثلا حل آخر لمسألة القيمة الإبتدائية المعطاة.

ليكن

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le B, \left|x - x_0\right| \le h \tag{12}$$

من (11) نحصل على

$$\left|Y(x) - y(x)\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left[f(s, Y(s)) - f(s, y(s))\right]ds\right|$$

أي

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(s, Y(s)) - f(s, y(s))\right|\left|ds\right|$$

أي

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le K\int_{x_0}^{x}\left|Y(s) - y(s)\right|\left|ds\right| \tag{13}$$

أي باستخدام (12)

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le KB\left|x - x_0\right| \tag{14}$$

من (13) ، (14) نحصل على

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le K^2B\int_{x_0}^{x}\left|s - x_0\right|dx \le \frac{K^2B\left|x - x_0\right|^2}{2!} \tag{15}$$

وكذلك بالتعويض مرة اخرى من (15) في دالة المكاملة في (13) نحصل على

$$\left|Y(x) - y(x)\right| \le \frac{K^3B}{2!}\int_{x_0}^{x}\left|s - x_0\right|^2 ds \le \frac{K^3B\left|x - x_0\right|^3}{3!}$$

وبتكرار هذه الطريقة نحصل على

$$|Y(x)-y(x)| \le \frac{K^n B|x-x_0|^n}{n!} \le B\frac{(Kh)^n}{n!}$$

وحيث إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} B\frac{(Kh)^n}{n!}$ تتقارب وبالتالي يكون

$$\lim_{n\to\infty} B\frac{(Kh)^n}{n!} = 0$$

وعلى ذلك يمكن جعل $|Y(x)-y(x)|$ أصغر من أي عدد مهما كان صغيرا وبالتالي فإن

$$Y(x)-y(x)=0 \quad \text{أي} \quad Y(x)=y(x)$$

وهذا يبين أن $y=y(x)$ دائما حل وحيد وبهذا يتم برهان النظرية.

ملحوظة: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تحقق الشرط

$$|\partial f/\partial y| \le K \qquad (i)$$

لكل قيم (x,y) في النطاق المعطى فإن شرط لبشتز يتحقق لنفس الثابت K.

ولإثبات ذلك نرى من نظرية القيمة المتوسطة

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=(y_2-y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=\bar{y}},\ y_1<\bar{y}<y_2 \qquad (ii)$$

حيث كل من $(x,y_2),(x,y_1)$ يقع في النطاق المعطى

ومن (i)، (ii) نجد أن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le K|y_2-y_1| \qquad (iii)$$

وهو شرط لبشتز. وهذا يبين أنه يمكن إستبدال شرط لبشتز(iii) بشرط أقوى (i).

نظرية ٣:

إذا كان S إما المستطيل $|x-x_0|\le h, |y-y_0|\le k$ أو الشريط $|x-x_0|\le h, |y|<\infty$ ، $f(x,y)$ دالة حقيقية معرفة على S بحيث ان $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودة ومتصلة على S وان $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le K$ $(x,y)\in S,$ فإن $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز على S بثابت ليبشتز K.

البرهان:

حيث ان $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dy\right|\le\int_{y_1}^{y_2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||dy|\le K\int_{y_1}^{y_2}|dy|$$

وبالتالي فإن

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le K|y_1-y_2|,\qquad (x,y_1),(x,y_2)\in S$$

وهذا يبين ان $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز بثابت K.

مثال (١)

اثبت ان $f(x,y)=xy^2$ تحقق شرط ليبشتز على المستطيل $S:|y|\le 1, |x|\le 1$ ولكن لاتحقق شرط ليبشتز على الشريحه $|x|\le 1, |y|<\infty$.

الحل:

ليكن $(x,y_1),(x,y_2)$ نقطتين في المستطيل S فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|xy_2^2-xy_1^2|=|x||y_2+y_1||y_2-y_1| \qquad (1)$$

وعلى ذلك فإنه في المستطيل $|x|\le 1, |y|\le 1$ فإن (١) تؤول الى

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le 1.2.|y_2-y_1|$$

وهذا يبين تحقق شرط لبشتز بثابت 2.

ولكن

$$|f(x,y_2)-f(x,0)|=|x||y_2|\to\infty$$

عندما $\infty \leftarrow |y_2|$ إذا كان $\alpha \neq |x|$ وهذا يبين ان شرط لبشتز غير متحقق على الشريحة $|x|<1, |y|<\infty$.

مثال (٢)

إذا كان S هو المستطيل $|x|\leq 0, |y|\leq b$ اثبت ان الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ تحقق شرط لبشتز ثم أوجد ثابت لبشتز

الحل :

ليكن $(x,y_1),(x,y_2)$ نقطتين في S فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|(x^2+y_2^2)-(x^2+y_1^2)|=|y_2^2-y_1^2|=|y_2+y_1||y_2-y_1|$$

وبالتالي فإن

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leq 2b|y_2-y_1|$$

وهذا يبين أنها تحقق شرط لبشتز بثابت $K=2b$.

مثال (٣)

إثبت أن إتصال الدالة $f(x,y)$ ليس كافيا لضمان وحدوية حل مسألة القيمة الإبتدائية $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\sqrt{|y|}$, $y(0)=0$ أوبعبارة أخرى إثبت أن حل مسألة القيمة الإبتدائية $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ يمكن أن يكون لها أكثر من حل بالرغم من أن $f(x,y)$ دالة متصله.

الحل

نعتبر مسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}, y(0) = 0$$

واضح ان $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ دالة متصلة لكل قيم y وان المعادلة (1) لها الحلين

$$y = 0, y = \begin{cases} x^2/4 & x \ge 0 \\ -x^2/4 & x < 0 \end{cases}$$

ف نثبت أن شرط ليبشتز

$$\frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{y_2 - y_1} \le K$$

تحقق فى اى منطقة تحتوى على الخط $y = 0$. فمثلا عندما $y_1 = 0$ ، y_2

ان

$$\frac{|f(x,y_2) - f(x,y_1)|}{y_2 - y_1} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}} \qquad (\because \sqrt{y_2} > 0)$$

بينا أن المقدار فى الطرف الأيسر يمكن جعله كبيرا كما نريد بإختيار y_2 صغيره صفرا كافيا وهذا يتعارض مع (2) حيث إن المقدار فى الطرف الأيسر لايجب ان يتجاوز عدد ثابت K.

مثال 4 :

إعط مثالا تبين فيه أن الدالة المتصلة يمكن الا تحقق شرط ليبشتز على مستطيل ما.

الحل :

نأخذ مثلا الدالة $f(x,y) = y^{2/3}$ على المستطيل

$$S : |x| \le 1, |y| \le 1 \qquad (1)$$

من الواضح أن $f(x,y)$ متصله على S.

ولكن

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| = \left|\frac{2}{3y^{1/3}}\right| \to \infty \qquad (2)$$

عندما $y \to 0$ وحيث إن $y = 0$ نقطة في S فإن المعادلة (2) تبين أن شرط ليبشتز غير متحقق للدالة $f = y^{2/3}$ على S

مثال (٥)

لمسألة القيمة الابتدائية $\frac{dy}{dx} = e^y , y(0) = 0$ أوجد أكبر فترة $|x| \le a$ التي يكون فيها لمسألة القيمة الابتدائية حل وحيد.

الحل :

ليكن $|f(x,y)| \le M$ وعلى ذلك فإن $|y - y_0| \le Ma$

(انظر النظرية حيث a بدلا من h ووضعنا $y_0 = 0$)

أي $e^y \le M \; , \; |y - 0| < Ma$

ليكن y_1 , y_2 في نطاق $|y| \le Ma$ ، $y_1 < y_2$ فإنه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة نجد أن

$$e^{y_2} - e^{y_1} = (y_2 - y_1)\left(\frac{\partial}{\partial y} e^y\right)_{y=\bar{y}} , \qquad \bar{y} \in (y_1 , y_2)$$

أي

$$e^{y_2} - e^{y_1} \le (y_2 - y_1)M \qquad \text{لأن } e^{\bar{y}} < M$$

وهذا يبين أن e^y تحقق شرط ليبشتز. وكذلك فإن المتباينة $e^y < M$ سوف تتحقق لكل قيم y بحيث إن $|y| \le Ma$ بشرط أن لكل $y = Ma$ فإن

$$e^{Ma} \le M$$

أو

$$a \le \ln M / M$$

باستخدام طرق إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة ما يمكن بسهولة أن نثبت أن الدالة $(\ln M)/M$ لها قيمة عظمى عندما $M = e = 2.718$. وبالتالي فإن نظرية الوحدوية لمسألة القيمة الإبتدائية تعطى $|x| \le a$ عندما $a = 1/e = 0.308$ وبالتالي تكون أكبر فترة هي $|x| \le 0.308$.

مثال (٦)

إثبت أنه في مسألة القيمة الإبتدائية $\frac{dy}{dx} = y \quad , \quad y(0) = 1$ ، يجب أن يكون الثابت a في نظرية بيكارد أقل من الواحد.

الحل

ليكن $|f(x,y)| < M$ ، فإن $|y - y_0| \le Ma$

(انظر مثال (5)) ، وعلى ذلك فإن $|y-1| \le Ma$

حيث $|y| \le M$

باختيار $M \ge 1$. فإن شرط ليبشتز يتحقق أيضا لأنه في هذه الحالة بأخذ الصورة

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2 - y_1| \le M\,|y_2 - y_1|, \quad M \ge 1$$

وكذلك

$$|y-1| \le Ma \Rightarrow |y| - 1 \le Ma$$

ومن ذلك يلي أن الشرط $|y| \le M$ سوف يتحقق لكل قيم $|y-1| \le Ma$ بحيث أن $|y| = 1 + Ma$ وعلى ذلك فإن

$$1 + Ma \le M \Rightarrow a < (M-1)/M = 1 - \frac{1}{M} < 1$$

عندما $1 \le M < \infty$.

ملحوظة : في الأمثلة السابقة لم نعين $h = \min(a, b/M)$ وهي الفترة $|x - x_0| \le h$ التي يكون لمسألة القيمة الإبتدائية حل حلا وحيداً وسنوضح ذلك في الأمثلة الآتية.

مثال (١):

أوجد التقريب الثاني لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 , y(0) = 0$$

الحل :

نلاحظ أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ كثيرة حدود في y, x ومتصلة على المستطيل

$$R : |x| \le a, |y| \le b$$

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \le |x^2| + |y^2| \le a^2 + b^2 = M$$

وعلى ذلك فإن

$$h = \min(a, b / M) = \min(a, b / a^2 + b^2)$$

اى ان h تعتمد على b, a فإذا كانت $b = 1, a = 1$ فإن $h = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ وعلى ذلك يكون لمسألة القيمة الإبتدائية المعطاة حل وحيد على الفترة $|x| \le 1/2$.

بإستخدام طريقه بيكارد للتقريب المتتالي ،حيث

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds , \quad y(0) = 0 \qquad (1)$$

التقريب الأول:

نضع n=1 في (1) نحصل على

$$y_1 = 0 + \int_0^x s^2 ds = x^3 / 3, y(0) = 0$$

التقريب الثاني:

بوضع n=2 في (1) نحصل على

$$y_2(x) = \int_0^x (s^2 + \frac{s^6}{63}) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

مثال (٢):

أوجد التقريب الثاني لمسألة القيمة الإبتدائية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y(0) = 1$$

على المستطيل $R : \{(x, y) : |x| \le 1, |y - 1| \le 1\}$

الحل

نلاحظ أن $f = x^2 + y^2$ كثيرة الحدود ومتصلة على R، وأن $a = 1, b = 2$،

وعليه فإن

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \le 5$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2x = 4 \text{ (الذي يمثل ثابت لبشتز)}$$

وعلى ذلك فإن

$$M = 5, h = \min(1, \frac{2}{5}) = 2/5$$

أي ان للمعادلة حلا على الفترة $|x| \le 2/5$

ويكون الحل التقريبي النوني للمعادلة هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds, y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

التقريب الأول:

بوضع n=1 في (2) نحصل على

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (s^2 + 1)ds = 1 + x + \frac{x^3}{3}$$

التقريب الثاني:

بوضع n=2 في (2) نحصل على

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[s^2 + \left(1 + s + \frac{s^3}{3} \right)^2 \right] ds = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

٧ - متباينة جرونول Gronwall`s inequality

هذه المتباينة لها أهميتها في المعادلات التفاضلية.

نظرية ٤:

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين غير سالبتين و متصلتين لكل $x \ge x_0$ ، K ثابت موجب وان

$$f(x) \le K + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s) ds, \; x \ge x_0$$

فإن

$$f(x) \le K \exp\left(\int_{x_0}^{x} g(s) ds \right)$$

البرهان:

من الفرض

$$\frac{f(x) g(x)}{K + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s) ds} \le g(x)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى x من x_0 إلى x نحصل على

$$\ln\left[K + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s) ds \right]_{x_0}^{x} \le \int_{x_0}^{x} g(s) ds$$

$$\ln\left[K + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s) ds \right] - \ln k \le \int_{x_0}^{x} g(s) ds$$

وبالتالي فإن

$$K+\int_{x_0}^{x} g(s)f(s)ds \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

أي

$$f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

وبذلك تثبت النظرية.

نتيجة (1):

إذا كان $f(x) \le K\exp\int_{x_0}^{x} f(s)ds$ حيث $K, f(x)$ كما في النظرية السابقة فإن

$f(x) \equiv 0$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ فإن

$$f(x) < \varepsilon + K\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

وباستخدام النظرية السابقة نجد أن

$$f(x) < \varepsilon\exp[k(x-x_0)], x \ge x_0$$

وبأخذ النهاية عندما $\varepsilon \to 0$ نحصل على

$$f(x) \equiv 0$$

وبهذا يثبت البرهان.

<u>ملحوظة:</u> يمكن إستخدام متباينه جرونويل فى إثبات وحدوية حل مسألة القيمة الإبتدائية السابقة

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \;, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

والتي تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{2}$$

إذا كان للمسألة (١) [أو المعادلة المكافئة (٢)] حلان y_1 , y_2 يحققان الشرط الابتدائي فإن

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds$$

ومن ذلك نجد أن

$$y_1 - y_2 = \int_{x_0}^{x} [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))]ds$$

أي أن

$$|y_1 - y_2| = \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))||ds|\right|$$

وباستخدام شرط ليبشتز نحصل على

$$|y_1 - y_2| \le K \left|\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)||ds|\right|$$

وباستخدام متباينة جرونويل [مع ملاحظة عدم وجود ثابت قبل علامة التكامل] نجد أن

$$|y_1 - y_2| \le 0.\exp(k|x - x_0|) \le 0$$

وعليه فإن $|y_1 - y_2| = 0$ أي $y_1(x) = y_2(x)$

وبهذا يثبت المطلوب

٨ - إعتماد حل مسألة القيمة الإبتدائية على الشرط الإبتدائي :

سوف نستخدم متباينه جرونويل فى إثبات أن حل مسألة القيمة الإبتدائية يعتمد تماما على الشرط الإبتدائي

فإذا كان هما $z(x), y(x)$ حلين لمسألة القيمة الإبتدائية (1) [أي المعادلة التكاملية (2)] ويحققان $y(x_0) = y_0$ ، $z(x_0) = z_0$ على الترتيب فإن

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds$$

أي أن

$$|y(x) - z(x)| \le |y_0 - z_0| + \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))||ds| \le |y_0 - z_0| + K\int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)||ds|$$

وبإستخدام متباينه جرونويل نحصل على

$$|y(x) - z(x)| \le |y_0 - z_0| \exp(K|x - x_0|)$$

من هنا نرى أن حل مسألة القيمة الإبتدائية يعتمد على الشرط الإبتدائي.

مثال

إثبت أن مسألة القيمة الإبتدائية

$$y'' + g(t, y) = 0, y(0) = y_0, y'(0) = z_0$$

حيث g دالة متصله فى منطقة ما D تحتوي $(0, y_0)$ تكافئ المعادلة التكاملية

$$y(t) = y_0 + z_0 t - \int_0^t (t - s) g(s, y(s)) ds$$

الحل

ليكن $\phi(t)$ هو حلا لمسألة القيمة الإبتدائية أي أن

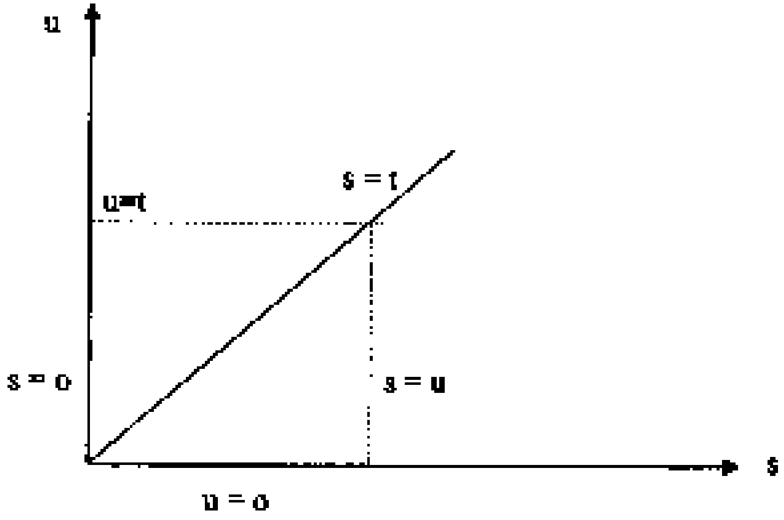
$$\phi'' + g(t,\phi(t)) = 0$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\phi(t) = -\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s,\phi(s))ds \right\} du + a + bt \qquad (1)$$

وحيث أن $\phi'(0) = z_0, \phi(0) = y_0$ فإن $a = y_0, b = z_0$

والتكامل الثاني ممتد على المنطقة فى المستوى uv كما هو مبين بالشكل.



وبعكس ترتيب التكامل نحصل على

$$\int_0^t \left\{ \int_0^u g(s,\phi(s))ds \right\} du = \int_0^t \left\{ \int_s^t du \right\} g(s,\phi(s))ds = \int_0^t (t-s) g(s,\phi(s))ds \qquad (2)$$

وبالتعويض من (٢) فى (١) نحصل على

$$\phi(t) = -\int_0^t (t-s)g(s,\phi(s))ds + y_0 + z_0 t$$

والآن نفرض أن ψ هو حلا للمعادلة التكاملية فإن $\psi(0) = y_0, \psi'(0) = z_0$ وبالتالي فإن $\psi(t)$ تحقق الشروط الإبتدائيه وبالإشتقاق مرتين وإستخدام النظرية الأساسية في التفاضل نجد أن

$$\psi'(t) = z_0 - \int_0^t g(s,\psi(s))ds$$

$$\psi''(t) = -g(t,\psi(t))$$

وبالتالي فإن ψ هو حلا لمسألة القيمة الإبتدائية.

ملحوظة: مسألة القيمة الإبتدائية $y'' + g(t,y) = 0$ يمكن كتابتها على الصورة $y'' = -g(t,y)$ حيث $y'' = 0$ هي المعادلة التفاضلية المتجانسه المناظرة والذي حلها على الصورة $y = y_0 + z_0 t$.

تمارين

١ -أوجد التقريب الثالث لمسألة القيمة الحدية $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2, y(0)=0$ على المستطيل $R=\{(x,y):|x|<1,|y|<1\}$ مستخدما طريقه بيكارد للتقريب.

٢ -أوجد المعادلة التكامليه المكافئه لمسألة القيمة الإبتدائية

$$y''+\mu^2 y=g(x,y), y(0)=y_0, y'(0)=z_0, \mu>0$$ (ثابت)

٣ -أوجد التقريب الثالث لحل مسألة القيمة الحدية:

$(i)\ \frac{dy}{dx}=2xy, y(0)=1,$ $(ii)\ \frac{dy}{dx}=3e^x+2y, y(0)=0$

$(iii)\ \frac{dy}{dx}=1+xy, y(0)=2,$ $(iv)\ \frac{dy}{dx}=2x-y^2, y(0)=0$

$(v)\ \frac{dy}{dx}=x+z, \frac{dz}{dx}=x-y^2, y(0)=2, z(0)=1$

$(vi)\ \frac{dy}{dx}=2x+z, \frac{dz}{dx}=3xy-x^2z, y(0)=2, z(0)=0$

٤ -اثبت أن:

(أ) $|y'|+|y|=0, y(0)=1$ ليس لها حل.

(ب) $y'=x, y(0)=1$ لها حل وحيد.

(ج) $y'=(y-1)/x \quad, y(0)=1$ لها عدد لانهائي من الحلول.

٥ - إذا كانت $f(x,y)=y^{2/3}$ إثبت أن شرط لبشتز غير متحقق في منطقة تحتوى نقطة الأصل وان حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ويحقق الشرط $y(0)=0$ ليس وحيدا

٦ - إذا كان $S:|x|\le a,|y|\le b$ إثبت أن الدالة $f(x,y)=x\sin y+y\cos x$ تحقق شرط لبشتز واوجد ثابت لبشتز.

٧ - إدرس وجود ووحداوية حل المعادلة $y'=y^3, y(1)=-1$.

٨ - إذا كانت الدوال f, g, h معرفه ومتصله وغير سالبه على الفترة $I=[0,\infty)$ وان

$$f(x) \le h(x) + \int_{x_0}^{x} g(s) f(s)\, ds, \qquad x \ge x_0$$

فاثبت ان

$$f(x) \le h(x) + \int_{x_0}^{x} g(s) h(s) \left(\exp \int_{s}^{x} g(u)\, du\right) ds$$

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة

Linear Systems with Constant Coefficients

الباب الثاني

الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة
Linear Systems with Constant Coefficients

١ – الأنظمة من المعادلات التفاضلية:

ليكن أن x متغير مستقل وكلا من $y_1, y_2, \dots, y_n$ متغيرات تابعة للمتغير x، ونفترض أن:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

تلك المجموعة من المعادلات السابقة تسمى نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. ويمكن كتابة النظام على الصورة

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad ; i = 1, 2, \dots, n.$$

وحيث إن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تستلزم وجود شرط إبتدائي واحد فإن النظام من المعادلات التي عددها n، يستلزم وجود n شرط إبتدائي، وتكون الشروط الإبتدائية $y_i(x_0) = y_{i0} \qquad ; i = 1, 2, \dots, n$

كما أن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى على ثابت إختياري واحد، فإن حل نظام من المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوى n من الثوابت الإختيارية

حيث عدد المتغيرات في النظام n ويكون حل النظام

$y_i = \phi_i(x, c_1, c_2, \dots, c_n), i = 1, 2, \dots, n$ حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت إختيارية.

مثال (١)

أوجد حل النظام

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x \qquad (1)$$

$$\frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \qquad (2)$$

مع الشروط الإبتدائية $y(0) = 1, z(0) = 0$ حيث x متغير مستقل.

الحل

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1 \qquad (3)$$

بالتعويض من (1)، (2) في الطرف الأيمن للمعادلة (3) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \qquad (4)$$

ثم نعوض عن z من (1) في (4)

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2[\frac{dy}{dx} - y - x] + 3x + 1$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1$$

أي أن $(D^2 + 2D + 1)y = 5x + 1; \qquad D = \frac{d}{dx}$

ولحل المعادلة السابقة نوجد

أولاً: حل المعادلة المتجانسة $(D^2+2D+1)y=0$

نفترض أن $y=e^{\lambda t}$ حلا للمعادلة و تكون المعادلة المساعدة $\lambda^2-2\lambda+1=0$ والتي جذورها $\lambda=-1,-1$

أي أن $y_H=(c_1+c_2x)e^{-x}$

ثانيا: الحل الخاص

$$y_p=\frac{1}{(D+1)^2}(5x+1).$$

$$=(1-2D+3D^2-\dots)(5x+1)=5x-10+1=5x-9$$

أي أن $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+5x-9$

بالتعويض عن y في (1) والحل بالنسبة إلى z

$$\therefore z=-(c_1+c_2x)e^{-x}+c_2e^{-x}+5-(c_1+c_2x)e^{-x}-5x+9-x$$

أي أن

$$z=(-2c_1+c_2-2c_2x)e^{-x}-6x+14$$

ومن الشروط الابتدائية $y(0)=1,z(0)=0$ نحصل على

$1=c_1-9$ أي $c_1=10$ ، $0=(-2c_1+c_2)+14$ أي $c_2=20-14=6$

أي أن

$$z=(-14-12x)e^{-x}-6x+14\ ،\ y=(10+6x)e^{-x}+5x-9$$

تحقق الشروط الابتدائية المعطاه

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx}{dt}=y+z\qquad(1),\ \frac{dy}{dt}=x+z\qquad(2),\ \frac{dz}{dt}=x+y\qquad(3).$$

الحل

بتفاضل طرفي (1) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}$$

من (3)، (2) نجد أن

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x+z+x+y, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+(y+z)$$

من (1) نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية

بفرض أن $\frac{d}{dx}=D$ فيكون

$$(D^2-D-2)x=0$$

نفترض أن $x=e^{\lambda t}$ وتكون المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=2,-1$$

فنحصل على

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{-t} \tag{4}$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}=y+z$$

$$z=2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}-y \tag{5}$$

بالتعويض من (5)، (4) في (2) نحصل على

$$\frac{dy}{dt}=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+2c_1e^{2t}-c_2e^{-t}-y,$$

أي أن
$$\frac{dy}{dt}+y=3c_1e^{2t}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى و يكون حلها هو

$$e^{\int dt}y=\int 3c_1e^{\int dt}e^{2t}dt+c_3 \quad \text{أي} \quad e^{t}y=3c_1\frac{e^{3t}}{3}+c_3$$

أي أن

$$y=c_1e^{2t}+c_3e^{-t}\ldots \qquad (6)$$

بالتعويض من (6)، (4) في (2) نجد أن

$$2c_1e^{2t}-c_3e^{-t}=c_1e^{2t}+c_2e^{-t}+z.$$
$$z=c_1e^{2t}-c_3e^{-t}-c_2e^{-t}$$

أو

$$z=c_1e^{2t}-c_4e^{-t}$$

مثال (٢)

حل النظام
$$\frac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}+x+y=0$$

الحل

نفترض أن $D=\frac{d}{dt}$ فيكون لدينا

$$(D^2-3)x-4y=0 \qquad (1) \qquad x+(D^2+1)y=0 \qquad (2)$$

بحذف y من المعادلتين (1)، (2) نحصل على

أي أن
$$[(D^2+1)(D^2-3)+4]x=0$$
$$\left(D^2-1\right)^2x=0 \qquad (3)$$

وعلى ذلك يكون حل المعادلة (3) هو

$$x=(c_1+c_2t)e^{t}+(c_3+c_4t)e^{-t} \qquad (4)$$

حيث $c_i, i = 1,2,3,4$ ثوابت إختيارية ونحصل من (4) على

$$Dx = c_2e^t + (c_1 + c_2t)e^t + c_4e^{-t} - (c_3 + c_4t)e^{-t}$$
$$= (c_1 + c_2 + c_2t)e^t + (c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t}$$

وكذلك

$$D^2x = c_2e^t + (c_1 + c_2 + c_2t)e^t - c_4e^{-t} - (c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t}$$

اي ان

$$D^2x = (c_1 + 2c_2 + c_2t)e^t - (2c_4 - c_3 - c_4t)e^{-t} \tag{5}$$

ومن (1) نجد ان

$$4y = D^2 - 3x \qquad = \tag{6}$$

وباستخدام (5) ، (6) نجد أن

$$y = \frac{1}{2}\{(c_2 - c_1 - c_2t)e^t - (c_4 + c_3 + c_4t)e^{-t}\} \tag{7}$$

ويكون حل النظام هو(٤) ، (7) .

مثال(٤)

حل النظام

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 3e^t \tag{1}$$

$$3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = 4e^{2t} \tag{2}$$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة(2) في 2 فنحصل على

$$6\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 4x + 2y = 8e^{2t} \tag{3}$$

بطرح (1) من (3) نحصل على

$$5\frac{dx}{dt}+6x=8e^{2t}-3e^{t}$$

$$\frac{dx}{dt}+\frac{6}{5}x=\frac{8}{5}e^{2t}-\frac{3}{5}e^{t} \qquad (4)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$e^{\int\frac{6}{5}dt}=e^{\left(\frac{6}{5}t\right)}$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$xe^{\left(\frac{6}{5}t\right)}=\int\left[\frac{8}{5}e^{\left(\frac{16}{5}t\right)}-\frac{3}{5}e^{\left(\frac{11}{5}t\right)}\right]dt$$

$$=\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{16}e^{\left(\frac{16}{5}t\right)}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{11}e^{\left(\frac{11}{5}t\right)}+c_1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{3}{11}e^{t}+c_1e^{-(6/5)t} \qquad (5)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في 3 نحصل على

$$3\frac{dx}{dt}+6\frac{dy}{dt}-6x+6y=9e^{t} \qquad (6)$$

وبطرح (2) من (6) نحصل على

$$5\frac{dy}{dt}-8x+5y=9e^{t}-4e^{-t}$$

$$5\frac{dy}{dt}+5y=8x+9e^{t}-4e^{2t}$$

وبالتعويض عن قيمة x من (5) نحصل على

$$5\frac{dy}{dt}+5y=\frac{75}{11}e^{t}+8c_1e^{-(6/5)t}$$

أي

$$\frac{dy}{dt}+y=\frac{15}{11}e^{t}+\frac{8c_1}{5}e^{-(6/5)t} \qquad (7)$$

وهي معادلة خطية من الرتبة الأولى ويكون معامل التكامل هو $e^{\int dt} = e^{t}$ ويكون حل المعادلة (7) على الصورة

$$y = c_2 e^{-t} - 8c_1 e^{(-4/3)t} + \frac{15}{22} e^{t} \tag{8}$$

ويكون حل النظام هو (5)، (8).

مثال (٥)

حل النظام

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2\cos t - 7\sin t$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2x = 4\cos t - 3\sin t$$

الحل

متروك للطالب ويكون الحل هو

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 3\cos t, \qquad y = (\sqrt{2}+1)c_1 e^{\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2})c_2 e^{-\sqrt{2}t} + 2\sin t.$$

٢ - الأنظمة الخطية ذوات المعاملات الثابتة

النظام من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة يكون على الصورة

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \\
&\ \vdots \\
\frac{dx_i}{dt} &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \\
&\ \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

حيث t متغير مستقل بينما $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغيرات تابعة ،والمعاملات a_{ij} ثوابت حيث $i, j = 1, 2, \dots, n$.

ويمكن وضع النظام على (1) الصورة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

أي $\frac{dX}{dt} = AX$

حيث $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$، والمتجه $\frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$، و A هي مصفوفة المعاملات.

ولحل هذا النظام، نفرض الحل $X = Ce^{mt}$ حيث C متجه ثابت و m عدد نريد تحديد قيمته.

بالتعويض في النظام نجد أن

$$ACe^{mt} = Cme^{mt} \text{ أي } (AC - mC)e^{mt} = 0$$

ومنها $(A-mI)Ce^{mt} = 0$ وحيث إن $e^{mt} \neq 0$ فإن

$$(A - mI)C = 0 \qquad (1)$$

وتسمى المعادلة الذاتية. نختار المتجه $C \neq 0$ فيكون المحدد

$$|A - mI| = 0 \qquad (2)$$

المعادلة(2) تسمى المعادلة المميزة (characteristic-equation) ونحصل منها على قيم m (القيم الذاتية eigen value) ومنها نحصل على حل النظام

بعد تعيين قيم المتجه C المناظرة لقيم m وقد تكون قيم m حقيقيه ومختلفه او بعضها مكرر او بعضها أعدادا مركبه ويسمى المتجه C بالمتجه الذاتي (eigenvector)

1 - القيم الذاتيه حقيقيه ومختلفه

مثال(١)

أوجد حل النظام

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة $X' = AX$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

تكون المعادلة المساعدة:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$$\therefore -3m + m^2 + 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2$$

نلاحظ القيم الذاتية 2، 1 حقيقية ومختلفة. وحيث إنه لكل قيمة ذاتيه يوجد متجه ذاتي فإن .

$m_1 = 1$ (i) : نعوض في المعادلة (1) نحصل على

ومنها نجد أن $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$

$$-c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

وإذا إعتبرنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 1$ و يكون

يكون المتجه الذاتي المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ومنها

$$X_1 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$m_2 = 2$ (ii) ، نعوض في المعادلة (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 + = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

وإذا إخترنا $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2$

اي أن المتجه الذاتي المناظر عبارة عن مضاعفات $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ اي

$$\therefore X_2 = b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

نظرية (١): -

المجموعة المكونة من k متجه من القياس n $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ تكون مستقلة خطيا إذا كان

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_kX_k(t) = 0, a < t < b$$

فإن ذلك يستلزم $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$

نظرية (٢): -

إذا كان $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ كل منها حل للنظام الخطي المتجانس $X' = AX$ فإن $c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \dots + c_nX_n(t)$ حل لنفس النظام للثوابت الإختيارية $c_1, c_2, \dots, c_n$.

نظرية (٣): -

إذا كانت A مصفوفة $n \times n$ من الأعداد الحقيقية وكانت $\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ مجموعة الحلول المستقلة خطيا للنظام $X' = AX$ ، $a < t < b$ فإن الحل المكون من حلول هذه المجموعة كلها يكون وحيدا ويسمى الحل العام.

ويسمى المحدد $|X_1(t)X_2(t)\dots X_n(t)|$ بالرونسكيان (Wronskian) لمجموعة متجهات الحل.

نظرية (٤): -

تكون مجموعة المتجهات الرأسيه $\{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$ مستقلة خطيا عند $t = t_0$ إذا وإذا كان فقط الرونسكيان لايساوي الصفر عند أي نقطة ولتكن $t = t_0$

أي إذا كان

$$W\{X_1(t_0), X_2(t_0), ..., X_n(t_0)\} = |X_1(t_0) ... X_n(t_0)| \neq 0.$$

نظرية (٥): -

إذا كانت $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ حلول مستقلة خطيا للنظام من المقياس n المتجانس $X' = AX$ في الفترة $a < t < b$ وإذا كانت $X_p(t)$ أي حل للنظام غير المتجانس $X' = AX + B(t)$ المناظر في نفس الفترة، فإن أي حل لذلك النظام يمكن كتابته على الصورة

$$X(t) = c_1 X_1(t) + ... + c_n X_n(t) + X_p(t)$$

حيث $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت.

من المثال السابق، إذا إخترنا

$$b_1 = b_2 = 1$$

$$\therefore W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} = e^{3t} \neq 0$$

$\therefore X_1(t), X_2(t)$ مستقلة خطيا ويكون الحل العام للنظام

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

مثال (٢)

أوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2$$

الحل

يمكن وضع النظام على الصورة

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

أي $X' = AX$

حيث
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 4-m & -1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - 8m + m^2 - 4 = 0$$
$$\therefore m^2 - 8m + 12 = 0 \Rightarrow (m-2)(m-6) = 0$$

و تكون القيم الذاتية هي $m_1 = 2, m_2 = 6$

١) $m_1 = 2$: بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فيكون $c_2 = 2$

على ذلك فإن
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

٢) $m_2 = 6$ بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = -2$ ، فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

و حيث أن الرونسكيان

$$W\{X_1, X_2\} = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{6t} \\ 2e^{2t} & 6e^{6t} \end{vmatrix} = -4e^{8t} \neq 0$$

أى أن X_1, X_2 مستقلان خطيا

ويكون الحل العام

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6t}$$

مثال(٢)

اوجد حل النظام $X' = AX$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل

كما سبق تكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 0 & 1-m & 3 \\ 0 & 3 & 1-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-m)[(1-m)^2-9] = 0 \Rightarrow (1-m)(m^2-2m-8) = 0$$

$$\therefore (m-1)(m-4)(m+2) = 0$$

$$m_1 = 1, m_2 = 4, m_3 = -2.$$

١) $m_1 = 1$: بالتعويض في المعادلة الذاتية $(A - mI)\, c = 0$ نحصل على

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 = 0, c_3 = 0, c_2 = 0$$

$\therefore$ c_1 فقط إختيارية

$\therefore$ نختار $c_1 = 1$ فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

٢) $m_2 = 4$: بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore 3c_1 + c_2 + c_3 = 0, -c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_3 = c_2 \Rightarrow 3c_1 = -2c_2$$

نفرض $c_2 = 3 \Leftarrow c_3 = 3 \Leftarrow c_1 = -2$ فيكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

٣) $m_3 = -2$: بالتعويض فى المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore 3c_1 - c_2 - c_3 = 0,\ c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore c_1 = 0$$

نختار $c_2 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$ فيكون الحل هو

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

نوجد محدد الرونسكيان عند $t = 0$

$$W\{X_1(0), X_2(0), X_3(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$\therefore$ الحلول مستقلة خطيا ويكون الحل العام هو

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ للمصفوفة المعطاه

$$1)A=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \qquad 2)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3)A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad 4)A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5)A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad 6)A=\begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$7)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 8)A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب - القيم الذاتية أعداد مركبة : -

في الجزء السابق نلاحظ أننا عرضنا للحالات التي تحتوى قيم ذاتية عبارة عن أعداد حقيقية فقط ولم نتعرض للقيم الذاتية المركبة ، والآن نعرض للمثال التالي.

مثال(٤)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

نوجد المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 2 & -4-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

١) $m_1 = 1 + i$

بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore (3-i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3-i}{5} c_1$$

باختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3 - i$ ويكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$$

٢) $m_2 = 1 - i$

بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} 3+i & -5 \\ 2 & -3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3+i)c_1 = 5c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{3+i}{5} c_1$$

باختيار $c_1 = 5$ فإن $c_2 = 3 + i$ ويكون الحل هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{-(1+i)t}$$

وبذلك نحصل على الحل العام

$$X = c_1\begin{pmatrix}5\\3-i\end{pmatrix}e^{(-1+i)t} + c_2\begin{pmatrix}5\\3+i\end{pmatrix}e^{-(1+i)t}$$

لكننا نعلم أن $e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$

ومن ذلك فإن

$$X = c_1\begin{pmatrix}5\\3-i\end{pmatrix}e^{-t}(\cos t + i\sin t) + c_2\begin{pmatrix}5\\3+i\end{pmatrix}e^{-t}(\cos t - i\sin t)$$

$$= e^{-t}\left[(c_1+c_2)\begin{pmatrix}5\cos t\\3\cos t+\sin t\end{pmatrix} + i(c_1-c_2)\begin{pmatrix}5\sin t\\-\cos t+3\sin t\end{pmatrix}\right]$$

بفرض $c_1+c_2 = b_1 , i(c_1-c_2) = b_2$

$$\therefore X = e^{-t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\sin t\right\} + b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\sin t\right\}\right]$$

ملحوظة : الحل السابق يمثل الحل العام وذلك لأن $W \neq 0$ ، بوضع $t = 0$

$$\therefore W(0) = \begin{vmatrix}5 & 0\\3 & -1\end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

$\therefore$ الحلان (معاملا b_1 , b_2) مستقلان.

ملحوظات هامة على المثال : -

١) إذا وجدت قيمة ذاتية عبارة عن عدد مركب فإنه توجد قيمة أخرى هي العدد المرافق.

٢) المتجهات الذاتية توجد أيضا على صورة أعداد مركبة ومرافقها.

٣) المتجه الذاتي الأول

$$B = \begin{pmatrix}5+i0\\3-i1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}i = \operatorname{Re} B + i\operatorname{Im} B$$

أي أن حل المثال السابق في الصورة العامة

$$X = e^{-t}\left[b_1\{\operatorname{Re}B\cos t - \operatorname{Im}B\sin t\} + b_2\{\operatorname{Im}B\cos t + \operatorname{Re}B\sin t\}\right]$$

٤) الرونسكيان في هذه الحالة عند $t = 0$ يعطى من العلاقة

$.W(0) = |\operatorname{Re}B, \operatorname{Im}B|$

مثال(٥)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل

تكون المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 2-m & -1 \\ -4 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore m^2 - 4m + 8 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = -4 \Rightarrow m = 2 \pm 2i$$

$$m_1 = 2+2i, m_2 = 2-2i$$

$m_1 = 2 + 2i$ (١)

بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2ic_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2ic_1$$

باختيار $c_1 = 1$ فإن $c_2 = 2i$ ،

فيكون $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$

الرونسكيان عند $t = 0$ هو $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

أي أن الحل العام

$$X = e^{2t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

مثال (٦)

أوجد حل النظام $X' = AX$

حيث
$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

الحل

تكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix}1-m & 2 & -1\\ 0 & 1-m & 1\\ 0 & -1 & 1-m\end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (1-m)\left[(1-m)^2 + 1\right] = 0$$

$$\therefore (1-m)(m^2 - 2m + 2) = 0$$

$$\therefore m_1 = 1, m_2 = 1+i, m_3 = 1-i.$$

١) $m_1 = 1$ ، بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = 0$$

$$c_2 = c_3 = 0$$

نختار $c_1 = 1$

∴ المتجه الذاتي المناظر يكون $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ أي أن

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t$$

٢) $m_2=1+i$ بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix}-i & 2 & -1\\0 & -i & 1\\0 & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore -ic_1+2c_2-c_3=0$$

$$-ic_2+c_3=0\Rightarrow c_3=ic_2$$

$$-c_2-ic_3=0$$

نختار $c_2=i$ فإن $c_3=-1$

$$\therefore -ic_1+2i+1=0\Rightarrow c_1=2-i$$

∴ المتجه الذاتي المناظر

$$B=\begin{pmatrix}2-i\\i\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

ويتم حساب $W(0)$ كما يلي

$$W(0)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\therefore X = b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t + e^t\left[b_2\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\sin t\right\}+b_3\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\sin t\right\}\right].$$

تمارين

أوجد الحل العام للنظام $X' = AX$ لكل مصفوفة A :

1) $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & 8\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4 & -13\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}12 & -17\\ 4 & -4\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 16 & -8\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

ج – القيم الذاتية مكررة :

الآن سوف نعرض مثالا بحيث تكون القيم الذاتية مكررة

مثال (٧)

أوجد حل النظام $X' = AX$

حيث $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

الحل

المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$\therefore (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 2$$

i) $m_1 = 2$ بالتعويض في المعادلة الذاتية نحصل على

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore -2c_1 + c_2 = 0$$

باختيار $c_1 = 1$ نجد أن $c_2 = 2$ ، فيكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

حيث إن القيمة الذاتية $m = 2$ مكررة

∴ نفترض أن الحل الثاني المناظر يكون

$$X_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} te^{2t}$$

أو بفرض آخر

$$X_2 = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (A)$$

حيث إن X_2 حل، فهو يحقق النظام، بالتعويض في النظام، نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} 2e^{2t} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} e^{2t}.$$

أي أن

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} c_1'(t) &= -2c_1(t)+c_2(t), \\ c_2'(t) &= -4c_1(t)+2c_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

بالتكامل نحصل على

$c_2(t) = 2c_1(t) + a$ حيث a ثابت إختيارى

من (1) (المعادلة الأولى)

$c_1'(t) = a \Rightarrow c_1(t) = at + b$ حيث b ثابت إختيارى

$$\therefore c_2(t) = 2at + 2b + a.$$

ومن ذلك نستنتج ان

$$X_2 = \begin{pmatrix} at+b \\ 2at+2b+a \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ate^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} be^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ae^{2t}.$$

إذا إخترنا $a = 0, b = 1$ نحصل على الحل X_1

اما إذا إخترنا $a = 1, b = 0$ نحصل على

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

عند $t = 0$ نجد أن

$$W\{X_1(0), X_2(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

على ذلك فإن الحل العام للنظام يكون على الصورة

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

بالنظر إلى المثال السابق وجدنا أننا فرضنا الحل الثاني X_2 على صورة المعادلة A ومن ذلك يمكننا من إيجاد الحل الثاني في حالة وجود قيمة مكررة للقيمة الذاتية ، الآن سنحاول من خلال المثال التالي والإستعانه بالمثال السابق من إستنتاج صيغة سهلة للحل الثاني X_2 .

مثال(٨)

أوجد حل النظام

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots \qquad (1)$$

الحل

تكون المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} 8-m & -1 \\ 4 & 12-m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore m^2 - 20m + 100 = 0$$

$$\therefore (m-10)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 10$$

بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore -2c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -2c_1$$

نختار $c_1 = 1 \Leftarrow c_2 = -2$ ،يكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{10t}.$$

بالإستعانه بالمثال السابق فإن X_2 تأخذ الصورة

$$X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}e^{10t}\ldots \qquad (2)$$

بالتعويض من(2) فى (1)

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}10te^{10t}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{10t}+\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}10e^{10t}=\begin{pmatrix}8&-1\\4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}8&-1\\4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}e^{10t}$$

نجد أن الحدين المشتملين على te^{10t} يحذفا ، وعلى ذلك

$$\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_3\\c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow -2c_3-c_4=1$$

نفرض $c_3=0$ فإن $c_4=-1$

على ذلك فإن

$$X_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}te^{10t}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}e^{10t}\ldots \qquad (3)$$

يكون الحل الثاني للنظام . وعلى ذلك يكون الحل العام للنظام هو

$$X=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{10t}+c_2e^{10t}\left[\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right].$$

مثال(٩)

أوجد حل النظام

$$\left.\begin{aligned}&D^2y+(D-1)v=0,\\&(2D-1)y+(D-1)w=0,\\&(D+3)y+(D-4)v+3w=0,\end{aligned}\right\} \qquad ;D=\frac{d}{dt}.$$

الحل

نلاحظ من المعادلة الأولى في النظام أنها من الرتبة الثانية في y .

نحول المعادلات جميعها إلى الرتبة الأولى .

نفترض أن $\quad D^2y = Du \Leftarrow Dy = u$

يصبح النظام على الصورة

$$\begin{aligned}
Du &= u - 3v + 3w + 3y, \\
Dv &= -u + 4v - 3w - 3y, \\
Dw &= -2u \qquad + w + y, \\
Dy &= u
\end{aligned}$$

$\therefore$ المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} 1-m & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4-m & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1-m & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = 0$$

أي أن

$$-[-3(-3+3-3m)-(4-m)(3-3+3m)]-m[-2(9-12+3m)$$
$$+(1-m)(4-5m^2+m^2-3)]=0$$
$$\therefore -[9m-(4-m)3m]-m[6(1-m)+(1-m)(m^2-5m+1)]=0$$
$$\therefore -3m[m-1]+m(m-1)[m^2-5m+7]=0$$
$$\therefore m(m-1)[m^2-5m+4]=0 \Rightarrow m(m-4)(m-1)^2=0.$$

$\therefore$ القيم الذاتية $m_1 = 0, m_2 = +4, m_3 = m_4 = 1$

١) $m_1 = 0$: بالتعويض في المعادلة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=0$$

$\therefore c_1 = 0, c_3 + c_4 = 0, c_4 = 1, c_3 = -1.$

$c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 3c_4 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$

و يكون الحل هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

٢) $m_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_1 \qquad -3c_3 - 3c_4 &= 0 \\ -2c_1 \qquad -3c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 \qquad\qquad -4c_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore c_1 = 4c_4, 3c_3 = -7c_4, 3c_2 = -16c_4.$

باختيار $c_1 = 12, c_2 = -16, c_3 = -7 \Leftarrow c_4 = 3$

$$\therefore X_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

٣) $m_3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad -c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 + 3[c_2 - c_3 - c_4] = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$-2c_1 \qquad\qquad + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0.$$

$\therefore c_3 = c_2 \Rightarrow c_2 = 1 = c_3$ ويكون الحل هو

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}.$$

وحيث أن $m_3 = m_4 = 1$ جذر مكرر فنفرض أن

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{t}.$$

بالتعويض في النظام نجد أن

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

وأخيراً، فإن حل النظام هو

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \right] + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

تمارين

أوجد حل النظام $X' = AX$ حيث

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

٧ - يفرض النظام $X' = AX$ حيث $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

أ) إثبت أن المعادلة المميزة للمصفوفة A لها جذران مكرران فقط إذا كان

$$(a-d)^2 + 4bc = 0$$

ب) إثبت إذا كان $a \neq d$ وإذا كان $(a-d)^2 + 4bc = 0$ فإن حل النظام يكون

$$X = c_1\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}e^{\frac{1}{2}(a+d)t} + c_2\left[\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\right]e^{\frac{1}{2}(a+d)t}$$

ج) ناقش الحل في حالة $(a-d)^2 + 4bc = 0$ و $a = d$.

٢ – الأنظمة الخطية غير المتجانسة: –

نفترض أنه لدينا النظام

$$X' = AX + B \qquad (1)$$

حيث A مصفوفة ثابتة $n \times n$ و B دالة متجه في t.

من نظرية سابقة نذكر أن حل النظام (1) يحتاج إلى حل خاص X_p بالإضافة إلى حل نظام المعادلات المتجانسة المناظر. سوف نستخدم طريقة تغيير البارامترات لحساب الحل الخاص X_p.

مثال (١):

أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f(t)\\ g(t)\end{pmatrix} \qquad (2)$$

الحل

لقد سبق لنا في مثال متقدم إيجاد حل النظام

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad (3)$$

وكان

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}_H = a_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{t} + a_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^{2t} \qquad (4)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان إختياريان

نفترض أن الحل الخاص للنظام (2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = a_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} \tag{5}$$

بالتعويض المباشر في (2) نحصل على

$$a_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + 2a_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + a_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}a_1(t)e^{t} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}a_2(t)e^{2t} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \dots \tag{6}$$

وبالإختصار، نجد أن

$$a_1'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + a_2'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1'(t)e^{t} \\ a_2'(t)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

باستخدام قاعدة كرامر، نجد أن

$$a_1'(t)e^{t} = \frac{\begin{vmatrix} f(t) & 1 \\ g(t) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2f(t) - g(t).$$

$$a_2'(t)e^{2t} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(t) \\ 1 & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = g(t) - f(t).$$

$$\therefore a_1'(t) = [2f(t) - g(t)]e^{-t} \Rightarrow a_1(t) = \int [2f(t) - g(t)]e^{-t}dt$$

$$a_2'(t) = [g(t) - f(t)]e^{-2t} \Rightarrow a_2(t) = \int [g(t) - f(t)]e^{-2t}dt$$

وعلى سبيل المثال ، بفرض $f(t)=e^t\,,\,g(t)=1$

$$\therefore a_1(t)=\int[2e^t-1]e^{-t}dt=2t+e^{-t}$$

$$a_2(t)=\int[1-e^t]e^{-2t}dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-t}.$$

فيكون الحل الخاص

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_p=(2t+e^{-t})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t+(-\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-t})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$$

أو

$$X_p=(2te^t+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(e^t-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

ويكون الحل العام هو

$$X=(a_1e^t+2te^t+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(a_2e^{2t}+e^t-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

مثال (٢)

أوجد حل النظام $X'=AX+B$

حيث $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}$

الحل

لقد سبق لنا الحصول على حل النظام المناظر

$$X'=AX$$

وكان

$$X_H=e^{2t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\}+b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

حيث b_1, b_2 ثابتان إختياريان

نفرض أن الحل الخاص هو

$$X_p = e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right].$$

بالتعويض في المعادلة عن X بالحل X_p المفروض، نجد أن

$$e^{2t}\left[b_1(t)\left\{-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t - 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t\right\} + b_2(t)\left\{-2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t\right\}\right.$$

$$\left.+b_1'(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2'(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right]$$

$$+2e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix}e^{2t}\left[b_1(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right] + \begin{pmatrix}3e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}.$$

وبالإختصار نجد أن

$$b_1'(t)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2'(t)\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin 2t\right\} = \begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\-2\sin 2t & 2\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1'(t)\\b_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix}$$

بالحل بالنسبة إلى $b_1'(t), b_2'(t)$، نجد أن

$$b_1'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & \sin 2t\\t & 2\cos 2t\end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6\cos 2t - t\sin 2t),$$

بتكامل الحد الأول نحصل على

$$\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2t$$

نفترض ان $I_1 = \int t\sin 2t\,dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \qquad dv = \sin 2t\,dt \Rightarrow du = dt \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2t.$$

$$\therefore I_1 = -\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

وعليه فإن

$$b_1(t) = \frac{1}{2}\left[3\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[11\sin 2t + 2t\cos 2t\right].$$

$$b_2'(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2t & 3 \\ -3\sin 2t & t \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[t\cos 2t + 6\sin 2t\right].$$

ليكن $I_2 = \int t\cos 2t\,dt$ وبالتكامل بالتجزئ حيث

$$u = t \qquad dv = \cos 2t\,dt \Rightarrow du = dt \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

$$\therefore I_2 = \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t$$

وعليه فإن

$$b_2(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - 3\cos 2t\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2t\sin 2t - 11\cos 2t\right].$$

إذن يكون الحل الخاص

$$X_p = e^{2t}\begin{pmatrix} b_1(t)\cos 2t + b_2(t)\sin 2t \\ -2b_1(t)\sin 2t + 2b_2(t)\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left[2t\cos 2t + 11\sin 2t\right]\cos 2t + \frac{1}{8}\left[2t\sin 2t - 11\cos 2t\right]\sin 2t \\ -2\left(\frac{1}{8}\right)\left[2t\cos 2t + 11\sin 2t\right]\sin 2t + 2\left(\frac{1}{8}\right)\left[2t\sin 2t - 11\cos 2t\right]\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ \frac{-11}{4} \end{pmatrix}.$$

أو

$$X_p = \frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}$$

ومن ذلك نجد أن الحل العام

$$X = X_H + \frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -11 \end{pmatrix}.$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من الأنظمة الآتية:

$$1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$4)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

ملحوظة إستخدم (3)

5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}e^{t}$ 6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix}e^{6t}$

7) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$

9) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11) $\left.\begin{array}{l} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \\ z' = x + y - 5z \\ u' = 5z \end{array}\right\}$ 12) $\left.\begin{array}{l} x_1' = -10x_1 + x_2 + 7x_3 \\ x_2' = -9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ x_3' = -17x_1 + x_2 + 12x_3 \\ x_1(0) = 6, x_2(0) = 1, x_3(0) = 10 \end{array}\right\}$

13) $\left.\begin{array}{l} x_1' = x_2, x_2' = x_3, x_3' = x_1 \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{array}\right\}$ 14) $\left.\begin{array}{l} x_1' = x_3 + 1, x_2' = x_1, x_3' = x_1 - 2 \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{array}\right\}$

15) $\dot{x} = -2x + y$, $\dot{y} = x - 2y$, $\dot{z} = x + y - 5z$, $\dot{u} = 5z$

. $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = u(0) = 0$

16) $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_3$, $\dot{x}_2 = -x_1 + x_3$, $\dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 + x_3$

$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 3$

17) $x_1' = 7x_1 + 4x_2 - 4x_3$, $x_2' = 4x_1 - 8x_2 - x_3$, $x_3' = -4x_1 - x_2 - 8x_3$

تحت الشروط الابتدائية

. $x_3(0) = -1$, $x_2(0) = 5$, $x_1(0) = 3$

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

Second Order Differential Equations with Variable Coefficients

الباب الثالث

معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

تكون المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة على الصورة العامة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \qquad (1)$$

وهذه المعادلة تكون متجانسة عندما $r(x)=0$ أما إذا كانت $r(x)\neq 0$ فإنها تكون غير متجانسة.

وهناك العديد من الطرق لحل تلك المعادلة، وكل معادلة لها مايناسبها من طريقة [وقد درسنا معادلة أويلر كوشي ومعادلة لاجرانج في الجزء الأول من هذا الكتاب] .

وسوف نعرض بعض الطرق البسيطة في التناول في هذا الباب .

١ - طريقة تغيير البارامترات (الوسائط) Variation of parameters

إذا علم أن الحلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هما $y_1(x), y_2(x)$ وبالتالي فإن

$$y_H=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

حيث $y_1(x), y_2(x)$ حلان مستقلان، c_1, c_2 ثابتان إختياريان.

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_p=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

حيث $c_1(x), c_2(x)$ دالتان في x ، ويمكن إيجاد كل منهما (أنظر الجزء الأول)، حيث:

$$c_1(x)=\int\frac{-y_2(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}r(x)dx, \qquad c_2(x)=\int\frac{y_1(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}r(x)dx.$$

وذلك بحل المعادلتين

$$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0$$
$$c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=r(x)$$

مثال (١)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(2x+1)(x+1)y''+2xy'-2y=(2x+1)^2 \quad \dots(1)$$

بعد إثبات أن كلاً من $y=x$, $y=\frac{1}{x+1}$ حل خاص للمعادلة المتجانسة المناظرة.

الحل

تكون المعادلة المتجانسة المناظرة على الصورة

$$(2x+1)(x+1)y''+2xy'-2y=0 \quad \dots(2)$$

أ) نثبت أن $y=x$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y'=1, y''=0$$

أي الطرف الأيمن $0 = 2x-2x =$ الطرف الأيسر

ب) نثبت ان $y=\frac{1}{x+1}$ حل للمعادلة (2) حيث

$$y'=\frac{-1}{(x+1)^2}, y''=\frac{2}{(x+1)^3}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = (2x+1)(x+1)\frac{2}{(x+1)^3}+2x\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$$

$$=\frac{2(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{2x}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}=0$$

= الطرف الأيمن

من أ)، ب) نجد أن $y_1=x, y_2=\frac{1}{x+1}$ حلان مستقلان للمعادلة (2).

أي ان الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

نضع المعادلة المعطاه على الصورة العامة:

$$y'' + \frac{2x}{(2x+1)(x+1)} y' - \frac{2}{(2x+1)(x+1)} y = \frac{2x+1}{x+1}$$

حيث $x \neq -1, \frac{-1}{2}$ ، بالمقارنة بالمعادلة العامة ، نجد ان

$$r(x) = \frac{2x+1}{x+1},$$

و على ذلك فإن حل المعادلة المتجانسة يكون على الصورة

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x+1}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان

نفترض أن الحل الخاص على الصورة

$$y_P = c_1(x) x + c_2(x) \frac{1}{x+1}$$

حيث

$$c_1(x) = \int \frac{-y_2}{W\{y_1, y_2\}} r(x)dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1}{W\{y_1, y_2\}} r(x)dx.$$

وبالتالي فإن

$$W\{y_1, y_2\} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x+1} \\ 1 & \frac{-1}{(x+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x-(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

فيكون

$$c_1(x)=\int \frac{\frac{-1}{x+1}}{\frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2x+1}{x+1}\,dx=\int dx=x$$

$$c_2(x)=\int \frac{x}{\frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2x+1}{x+1}\,dx=-\int x(x+1)\,dx=\int\left[(x+1)-(x+1)^2\right]dx=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3.$$

وعلى ذلك يكون الحل الخاص هو

$$y_p=x.x+\left[\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3\right]\frac{1}{x+1}=x^2+\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x+1)^2$$

$$=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y=c_1x+\frac{c_2}{x+1}+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}.$$

٢ - التحويل إلى الصورة القياسية : -

إذا كان لدينا المعادلة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (1)$$

نستخدم التعويض $y=uv$ ، حيث u دالة في x وعلى ذلك فإن v دالة إختيارية ،

$$y'=uv'+u'v,\ y''=uv''+2u'v'+u''v.$$

بالتعويض في (1) نجد أن

$$uv''+(2u'+pu)v'+(u''+pu'+qu)v=r \qquad (2)$$

حيث u,v,p,q,r دوال في x.

نختار u بحيث تحقق $\qquad 2u'+pu=0$

وبالتالي فإن

$$u = \exp\left[-\frac{1}{2}\int p\,dx\right]$$

أي

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}$$

ثم بالتعويض عن u, u', u'' في المعادلة (2) ، تصبح المعادلة على الصورة

$$v'' + I(x)v = R(x)... \qquad (3)$$

حيث

$$I(x) = q - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2 , R(x) = \frac{r}{u}$$

المعادلة(3) تسمى الصورة القياسية للمعادلة (1) وهي تكون على صورة معادلة خطية ذات معاملات ثابتة أوعلى صورة معادلة أويلر كوشي، وبحلها نحصل على الدالة v ، وبذلك نحصل على الحل العام $y = uv$.

مثال ٢)

بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \sec x \qquad ; x > 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = x \sec x$$

نفرض $y = uv$ بحيث نختار $u = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}$

بالمقارنة بالمعادلة $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ نجد أن

$$p(x) = \frac{-2}{x}, q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}, r(x) = x \sec x$$

وبالتالي فإن

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{x}dx} = x$$

وعلى ذلك فإن $y = xv,\ y' = xv' + v,\ y'' = xv'' + 2v'$

بالتعويض في المعادلة نحصل على

$$xv'' + 2v' - \frac{2}{x}(xv' + v) + (1 + \frac{2}{x^2})xv = x\sec x$$

$$\therefore v'' - \left[\frac{2}{x^2} - 1 - \frac{2}{x^2}\right]v = \sec x$$

أي أن $v'' + v = \sec x$

وتلك هي الصورة القياسية للمعادلة التفاضلية ، وهي معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة ولحلها ،

١) توجد حل المعادلة المتجانسة $(D^2 + 1)v = 0$

نجد أن $v = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

٢) توجد الحل الخاص v_p بطريقة تغيير البارامترات وذلك بفرض

$$v_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

حيث $v_1 = \cos x,\ v_2 = \sin x$

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore c_1(x) = \int \frac{-v_2}{W} f dx = \int -\sin x.\sec x dx = \ln \cos x$$

$$c_2(x) = \int \frac{v_1}{W} f dx = \int \cos x \sec x dx = x.$$

$$\therefore v_p = (\ln \cos x)\cos x + x \sin x.$$

ومن ذلك فإن الحل العام للمعادلة القياسية

$$v = (c_1 + \ln \cos x)\cos x + (c_2 + x)\sin x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه

$$y = x\left[(c_1 + \ln\cos x)\cos x + (c_2 + x)\sin x\right].$$

مثال(٣)

بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام للمعادلة

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0 \qquad ; x > 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

بالمقارنة بالمعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

نجد أن

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int p(x)dx = \int\frac{1}{x}dx = \ln x$$

نختار
$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

نستخدم التعويض $y = \frac{1}{\sqrt{x}}v$ للتحويل إلى الصورة القياسية فيكون

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v,\ y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}v'' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v' - \frac{1}{2x\sqrt{x}}v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}v'' - \frac{1}{x\sqrt{x}}v' + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v.$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نجد أن

$$\frac{1}{\sqrt{x}}v''-\frac{1}{x\sqrt{x}}v'+\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}v+\frac{1}{x\sqrt{x}}v'-\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}v+\frac{1}{4\sqrt{x}}v-\frac{1}{4x}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}}v''+\frac{1}{4\sqrt{x}}v=0.$$

ي $\sqrt{x}$

دلة على الصورة القياسية $\qquad v''+\frac{1}{4}v=0$

غون

$$v=c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x.$$

حل العام للمعادلة يكون:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\frac{1}{2}x+c_2\sin\frac{1}{2}x\right].$$

طريقة تحليل المؤثر:

وهي طريقة سهلة إذا كانت قابلة للتطبيق ، وهي طريقة تختزل المعادلة من الرتبة الثانية إلى معادلة من الرتبة الأولى .

إذا كان لدينا المعادلة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

أو

$$(D^2+p(x)D+q(x))y=r(x) \qquad (1)$$

و أمكن تحليل المؤثر التفاضلي كما يأتي

$$\left[D^2+p(x)D+q(x)\right]y=(D+p_1(x))(D+p_2(x))y$$

تصبح المعادلة على الصورة

$$(D+p_1(x))(D+p_2(x))y=r(x)$$

ثم نفترض أن

$$(D + p_2(x))y = z \tag{2}$$

و على ذلك فإن

$$(D + p_1(x))z = r(x)$$

أو

$$\frac{dz}{dx} + p_1(x)z = r(x)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ، وبحلها نحصل على قيمة z و بالتعويض في (2) عن $z = z(x)$ تصبح (2) على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = z(x)$$

و هي أيضا معادلة خطية من الرتبة الأولى في y وبحلها نحصل على الحل العام y.

مثال (٤)

بطريقة تحليل المؤثر اوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+2)\,y'' - (2x+5)\,y' + 2y = 2\,(x+2)^2\,e^{2x} \quad , x \neq 2$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$[(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2]y = 2(x+2)^2 e^{2x} \tag{1}$$

حيث $D = \dfrac{d}{dx}$

وبتحليل الطرف الايسر للمعادلة (1) تصبح على الصورة

$$((x+2)D - 1)(D-2)y = 2(x+2)^2 e^{2x} \tag{2}$$

نفترض أن $(D-2)y = z .....(3)$

بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$$\therefore ((x+2)D-1)z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

او

$$(x+2)\frac{dz}{dx} - z = 2(x+2)^2 e^{2x}$$

بالقسمة على $(x+2)$ ،تصبح

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x+2} z = 2(x+2)e^{2x} \qquad .....(4)$$

المعادلة(4) معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x+2} dx} = \frac{1}{x+2}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int \frac{1}{x+2} 2(x+2)e^{2x} dx = e^{2x}.$$

ويكون حل المعادلة (4) هو

$$\frac{1}{x+2} z = e^{2x} + c_1$$

$$\therefore z = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2) \qquad .....(5)$$

بالتعويض من (5) في (3)

$$\therefore (D-2)y = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2)$$

او

$$\frac{dy}{dx} - 2y = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ، ويكون عامل التكامل μ هو

$$\mu = e^{-\int 2\,dx} = e^{-2x} \Rightarrow$$

$$\mu = \int e^{-2x}\left[(x+2)e^{2x} + c_1(x+2)\right]dx$$

$$\mu = \frac{1}{2}(x+2)^2 + c_1\left[\frac{e^{-2x}}{-2}(x+2) - \frac{e^{-2x}}{4}\right]$$

اي أن الحل العام يكون

$$e^{-2x}y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}c_1e^{-2x}(x+2) - \frac{1}{4}c_1e^{-2x} + c_2$$

أو

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2e^{2x} - \frac{1}{4}c_1(2x+5) + c_2e^{2x}.$$

مثال (٢)

أ) أثبت أن $xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2)$

ب) أوجد الحل العام للمعادلة

$$xy'' + (2x+3)y' + 4y = e^{2x}$$

بطريقة تحليل المؤثر.

الحل

أ)

$$(D+2)(xD+2)y = D(xD)y + D(2y) + 2xDy + 4y$$

$$= xD^2y + Dy + 2Dy + 2xDy + 4y$$

$$= [xD^2 + (2x+3)D + 4]y.$$

اي أن $xD^2 + (2x+3)D + 4 \equiv (D+2)(xD+2)$

ب) لحل المعادلة، يمكن أن نضعها على الصورة

$$(D+2)(xD+2)y = e^{2x} \qquad \text{.....(1)}$$

نفترض أن $(xD+2)y = z. \qquad (2)$

بالتعويض في (1)

$$\therefore (D+2)z = e^{2x}$$

أو

$$\frac{dz}{dx} + 2z = e^{2x} \qquad (3)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int e^{2x} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}.$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (3) هو

$$e^{2x} z = \frac{1}{4} e^{4x} + c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore z = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

بالتعويض عن z في (2) فيكون

$$(xD+2)y = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x}.$$

أو

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{c_1}{x} e^{-2x} + \frac{1}{4x} e^{2x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى، ويكون عامل التكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

وعلى ذلك فإن

$$\int x^2\left[\frac{c_1}{x}e^{-2x}+\frac{1}{4x}e^{2x}\right]dx=\int(c_1xe^{-2x}+\frac{1}{4}xe^{2x})dx$$

$$=c_1[\frac{-1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}]+\frac{1}{4}[\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}]$$

$$=\frac{-1}{4}c_1(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{16}(2x-1)e^{2x}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة (1) يكون على الصورة

$$x^2y=\frac{-1}{4}c_1(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{16}(2x-1)e^{2x}+c_2$$

أو

$$y=\frac{-1}{4}c_1\frac{(2x+1)}{x^2}e^{-2x}+c_2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{16}\frac{(2x-1)}{x^2}e^{2x}.$$

ملحوظة: عند إستخدام طريقة تحليل المؤثر (عموماً) فإن

$$[D+p_1(x)][D+p_2(x)]y\neq[D+p_2(x)][D+p_1(x)]y.$$

٤ - إستخدام صيغة آبل في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

أولاً - المعادلة المتجانسة : -

إذا كان لدينا المعادلة $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ وكان $y_1(x),y_2(x)$ هما حلا المعادلة ، حيث $p(x),q(x)$ دالتين متصلتين في الفترة $a\le x\le b$

تمكن آبل (Abel) من حساب قيمة $W\{y_1,y_2;x\}$ أو $W\{y_1(x),y_2(x)\}$ بالصيغة الآتية:

$$W\{y_1,y_2;x\}=W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$$

حيث $a\le x_0\le x\le b$.

وهذه الصيغة تعرف باسم صيغة آبل، ونلاحظ أن $W\{y_1,y_2;x_0\}$ قيمة ثابتة لأنها عند نقطة معينة x_0 وتستخدم هذه الصيغة في إيجاد حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الثانية إذا علم أحد الحلين، وليكن $y_1(x)$ فإن

$$y_2(x)=W(y_1,y_2;x_0)\,y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\left[y_1(s)\right]^2}ds$$

وحيث إن $W\{y_1,y_2;x_0\}$ مقدار ثابت فإننا نعتبره مساويا الوحدة، وبالتبسيط يمكن أن نكتب

$$y_2(x)=y_1(x)\int^{x}\frac{e^{-\int p(t)dt}}{\left[y_1(s)\right]^2}ds$$

حيث يكون الحل العام $\quad y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

ثانيا: - المعادلة غير المتجانسة: -

باستخدام صيغة آبل، أمكن حل المعادلة غير المتجانسة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

وذلك إذا علم $y_1(x)$ حل للمعادلة المتجانسة، فيكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة على الصورة

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int^{x}\frac{r(s)}{W\{y_1,y_2;s\}}\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1(x) & y_2(x)\end{vmatrix}ds$$

حيث $y_2(x)$ الحل الآخر للمعادلة المتجانسة، ونحصل على $W\{y_1,y_2;s\}$ باستخدام صيغة آبل

$$W\{y_1,y_2;s\}=W\{y_1,y_2;x_0\}e^{-\int^{s} p(t)dt}$$

وباعتبار $W(y_1, y_2; x_0) = 1$

فإن الحل العام يكون على الصورة

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int^x e^{\int p(s)ds} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

مثال (1)

إذا علم أن $y_1 = x\sin x$ حل خاص للمعادلة المتجانسة $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$ فأوجد الحل العام للمعادلة $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^3\sec x; x > 0$ بإستخدام صيغة آبل

الحل

نتحقق أولاً أن $y_1 = x\sin x$ حل للمعادلة المتجانسة وعلى ذلك فإن

$$y' = x\cos x + \sin x, y'' = -x\sin x + 2\cos x.$$

الطرف الأيمن $= x^2[-x\sin x + 2\cos x] - 2x[x\cos x + \sin x] + (x^2+2)x\sin x$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= 0$

ثم نوجد بإستخدام صيغة آبل

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$$

نضع المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = 0$$

$$\therefore p(x) = \frac{-2}{x}$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\therefore y_2 = x\sin x \int \frac{x^2}{x^2 \sin^2 x}dx = x\sin x \int \operatorname{cosec}^2 x dx$$

$$= -x\sin x \cot x = -x\cos x$$

ثم نوجد

$$\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s\sin s & -s\cos s \\ x\sin x & -x\cos x \end{vmatrix} = -sx\sin s\cos x + sx\cos s\sin x$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \int^x e^{\int p(s)ds} r(s) \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} ds$$

$$= c_1x\sin x - c_2x\cos x + \int^x e^{\int \frac{-2}{s}ds} s\sec s[-sx\sin s\cos x + sx\cos s\sin x]ds$$

$$= c_1x\sin x - c_2x\cos x + x\int^x \sec s[-\sin s\cos x + \cos s\sin x]ds$$

$$y = c_1x\sin x - c_2x\cos x + x[\cos x\ln\cos x + x\sin x].$$

مثال ٢

إذا علم ان $y_1(x) = x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \qquad x \neq 1$$

فأوجد الحل العام للمعادلة بإستخدام صيغة آبل

الحل

نتحقق أولا أن $y_1 = x$ حل للمعادلة، ثم نضع المعادلة على الصورة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

أي على الصورة

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

حيث

$$p(x) = -\frac{x}{x-1}$$

$$-\int p(x)dx = \int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx = \int \left[1 + \frac{1}{x-1}\right]dx$$

$$= x + \ln(x-1).$$

$$\therefore e^{-\int p(x)dx} = e^{x+\ln(x-1)} = (x-1)e^x.$$

وباستخدام صيغة آبل

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{\left[y_1(x)\right]^2}dx$$

$$= x\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = x\int [\frac{1}{x}e^x - \frac{1}{x^2}e^x]dx.$$

نوجد $\int \frac{1}{x}e^x dx$ بالتجزئ

$$let \qquad u = \frac{1}{x} \qquad dv = e^x dx \qquad du = \frac{-1}{x^2}dx \qquad v = e^x.$$

$$\therefore \int \frac{1}{x}e^x dx = \frac{1}{x}e^x + \int \frac{1}{x^2}e^x dx$$

$$y_2(x) = x[\frac{1}{x}e^x] = e^x.$$

ومن ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y(x) = c_1 x + c_2 e^x.$$

٥ - إستبدال المتغير المستقل

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R \qquad (1)$$

حيث P, Q, R دوال في x . وباستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z أي $z = f(x)$ مثلا فيكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$$= \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + Qy = R$$

أو

$$\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz} + Qy = R$$

بالقسمة على $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (2)$$

حيث

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\ Q_1 &= \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

حيث P_1, Q_1, R_1 دوال في x فقط (ويمكن تحويلهم إلى دوال في z باستخدام التعويض $(z = f(x))$. إذا ساوينا Q_1 بالثابت فإن P_1 تصبح ثابتا أيضا وبالتالي يمكن حل المعادلة (2) لأنها معادلة خطية ذات معاملات ثابته.

ويمكن تلخيص خطوات الحل بهذه الطريقة على النحو التالي: -

(i)نجعل معامل y'' يساوي الوحدة أي تكون المعادلة على الصورة

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (1)$$

(ii) نفرض ان $Q = \pm Kf(x)$ ثم نفرض العلاقة بين x, z على الصورة

$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = Kf(x)$ حيث K ثابت ما.

(iii) من الخطوة (ii) يكون

$$\frac{dz}{dx} = +\sqrt{Kf(x)} \qquad (2)$$ (مهملا الإشارة السالبة)

ومنها

$$z = \int \sqrt{Kf(x)}dx \qquad (3)$$

(iv) من العلاقة (3) بين x, z يمكن تحويل المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1 \qquad (4)$$

حيث

$$P_1=\frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \qquad (5)$$

من (2) نرى ان $Q_1=\frac{\pm Kf(x)}{Kf(x)}=\pm 1$ ، ثابت ما. وبعد ذلك نحسب P_1. فإذا كانت تساوي ثابت فإنه يمكن حل المعادلة (4) لأنها معادلة خطيه ذات معاملات ثابته. أما إذا لم تكن كذلك فتفشل هذه الطريقه

(٧) بعد حل المعادلة (4) نعوض عن z بدلاله x فنحصل على الحل المطلوب.

مثال (١)

حل المعادلة

$$(\sin^2 x)y''+\sin x\cos xy'+4y=0$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y''+\cot xy'+4\operatorname{cosec}^2 xy=0 \qquad (1)$$

فيكون

$$P=\cot x,Q=4\operatorname{cosec}^2 x,R=0 \qquad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=4\operatorname{cosec}^2 x \qquad (3)$$

ومنها نحصل على

$$dz = 2\operatorname{cosec} x \Rightarrow z = 2\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (4)$$

وباستبدال المتغير المستقل x بالمتغير z فتتحول المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (5)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-2\operatorname{cosec} x.\cot x + \cot x(2\operatorname{cosec} x)}{4\operatorname{cosec}^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{4\operatorname{cosec}^2 x}{4\operatorname{cosec}^2 x} = 1, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0$$

وبالتعويض في (5) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0 \Rightarrow (D_1^2 + 1)y = 0; D_1 = \frac{d}{dz}$$

ويكون الحل على الصورة

$$y = c_1\cos z + c_2\sin z$$
$$= c_1\cos\left\{2\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\} + c_2\sin\left\{2\ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\}.$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$(\cos x)\,y'' + y'\sin x - 2y\cos^3 x = 2\cos^5 x$$

الحل

نكتب المعادلة على الصورة

$$y'' + y' \tan x - (2\cos^2 x)y = 2\cos^4 x \qquad (1)$$

بالمقارنه مع

$$y'' + Py' + Qy = R$$

يكون لدينا

$$P = \tan x, Q = -2\cos^2 x, R = 2\cos^4 x \qquad (2)$$

نختار z بحيث

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\cos^2 x \qquad \therefore \frac{dz}{dx} = \sqrt{2}.\cos x$$

$$dz = \sqrt{2}.\cos x dx \qquad \therefore z = \sqrt{2}\sin x \qquad (3)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad (4)$$

حيث

$$P_1 = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}\sin x + \tan x.\sqrt{2}\cos x}{2\cos^2 x} = 0$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -1, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{2\cos^4 x}{2\cos^2 x} = \cos^2 x$$

أي

$$R_1 = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{z^2}{2}$$

بالتعويض في (4) نحصل على

$$(D_1^2 - 1)y = 1 - \frac{z^2}{2} \qquad \text{أي} \qquad \frac{d^2 y}{dz^2} - y = 1 - \frac{z^2}{2}$$

ويكون حل الدالة المتممة هو

$$y_H = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$y_P = \frac{1}{D_1^2 - 1}[1 - \frac{1}{2}z^2] = -1 + \frac{1}{2}(z^2 + 2) = \frac{z^2}{2}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} + \frac{1}{2}z^2 = c_1 e^{\sqrt{2}\sin x} + c_2 e^{-\sqrt{2}\sin x} + \sin^2 x.$$

٦ - المعادلة التامة: Exact Equations

يقال ان المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (1)$$

تامه إذا أمكن إيجاد معادلة تفاضلية من الرتبه الأولى يكون تفاضلها هو المعادله (1) وبعباره اخرى تكون المعادلة (1) تامه إذا امكن الحصول عليها بتفاضل معادلة تفاضلية من الرتبه الأولى. ومثال ذلك المعادلة التفاضلية

$$(x^2+1)y'' + 3xy' + y = 3x^2$$

تامه لأنها تنتج من تفاضل المعادلة

$$(x^2+1)y' + xy' + xy = x^3$$

وسنسرد النظرية التاليه بدون برهان

نظرية:

الشرط الضروري والكافي لتكون المعادلة (1) تامه هو

$$a_2''(x)-a_1'(x)+a_0(x)=0$$

وبالتالي يكون التكامل الأول "First integral" للمعادلة (1) هو

$$a_2y'+(a_1-a_2')y=\int f(x)dx+c \qquad (2)$$

مثال (١)

أثبت أن المعادلة $(\cos x)y''+(2\sin x)y'+(3\cos x)y=\tan^2 x$ تامة

الحل

بالمقارنة بالمعادلة(١) نجد أن

$$a_2=\cos x, a_1=(2\sin x), a_0=3\cos x$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2'=-\sin x, a_2''=-\cos x, a_1'=2\cos x, a_0=3\cos x$$

وبتطبيق الشرط

$$a_2''-a_1'+a_0=0$$

نحصل على

$$-\cos x-2\cos x+3\cos x=0$$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاة تامة

مثال (٢)

أثبت أن المعادلة $(1+x^2)y''+3xy'+y=1+3x^2$ تامه ثم أوجد حلها.

الحل

لدينا

$$a_2=(1+x^2), a_1=3x, a_0=1$$

وعلى ذلك فإن

$$a_2'=2x, a_2''=2, a_1'=3$$

وباستخدام شرط التمام

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 3 + 1 = 0$$

∴ المعادلة المعطاه تامه، ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2) وهو

$$a_2 y' + (a_1 - a_2')y = \int f(x)dx + c$$

أى أن

$$(1+x^2)y' + (3x-2x)y = \int (1+3x^2)dx + c$$

$$(1+x^2)y' + xy = x + x^3 + c_1$$

أى أن
$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وهى معادلة خطية يكون عامل التكامل هو $e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

ويكون حلها هو

$$y(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c_1 \ln\left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] + c_2$$

مثال(٢)

أثبت ان المعادلة $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = \sec^2 x$ تامه وأوجد حلها بحيث $y=0, y'=1$ عندما $x=0$.

الحل

لدينا
$$a_2 = 1 + x^2, a_1 = 4x, a_0 = 2$$

$$a_2' = 2x, a_2'' = 2, a_1' = 4$$

وبإستخدام شرط التمام

$$a_2'' - a_1' + a_0 = 2 - 4 + 2 = 0$$

وعليه فإن المعادلة المعطاه تامة ويكون تكاملها الأول بإستخدام المعادلة (2)

$$a_2 y' + (a_1 - a_2')y = \int f(x)dx + c$$

هو

$$(1+x^2)y' + (4x-2x)y = \int \sec^2 x\,dx + c_1$$

أي أن

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}\,y = \frac{\tan x}{1+x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ويكون عامل التكامل هو $(1+x^2)$ ويكون حلها هو

$$y(1+x^2) = \ln\sec x + c_1\tan^{-1}x + c_2$$

وبوضع $x=0,\ y=0$ نحصل على $c_2=0$ وبتفاضل المعادلة الأخيرة نحصل على

$$(1+x^2)y' + 2xy = \tan x + \frac{c_1}{1+x^2}$$

وبوضع $x=0,\ y=0,\ y'=0$ فيها نحصل على $c_1=1$ وبذلك يكون الحل هو

$$(1+x^2)y = \ln\sec x + \tan^{-1}x.$$

٧- المعادلة المزاملة: Adjoint Equation

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية

$$L(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

تامة فإننا نبحث عن عامل تكامل $z(x)$ بحيث يكون $zL(y)$ تفاضل تام أي يكون $zL(y) = \frac{d}{dx}L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلي من الرتبة الأولى، وبالتكامل بالتجزئ أي $\int zL(y)\,dx = L_1(y)$ حيث L_1 مؤثر تفاضلي من الرتبة الأولى وعلى ذلك فإن $zL(y)$ تصبح تفاضلا تاما إذا كان

$$\bar{L}(z) = (a_2(x)z)'' - (a_1(x)z)' + a_0(x)z = 0 \qquad (2)$$

من ذلك نرى أن البحث عن عامل التكامل للمعادلة (1) قادنا إلى البحث عن حل لمعادلة تفاضلية أخرى من الرتبة الثانية (2) تسمى المعادلة (2) بالمعادلة المزاملة للمعادلة

(1) كما يسمى $\bar{L}$ بالمؤثر المزامل Adjoint operator للمؤثر L. فإذا أمكننا إيجاد الحل z للمعادلة المزاملة (2) فإن z هي عامل التكامل للمعادلة (1) الذي يحولها إلى معادلة خطية يسهل حلها. هذا وقد لانستطيع حل المعادلة المزاملة (2). وتوجد حالات خاصة يسهل فيها حل المعادلة المزاملة (2).

ملحوظة: المعادلة المزاملة للمعادلة (2) هي المعادلة (1).

المعادلة المزاملة ذاتيا Self adjoint equation

تعريف: يقال أن المعادلة (1) مزاملة ذاتيا إذا كانت المعادلة المزاملة (2) لها نفس صورة المعادلة الأصلية (1). أي تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا إذا كان

$$\bar{L}(y) = L(y)$$

مثال (1)

معادلة بسل من الرتبة صفر $xy'' + y' + xy = 0$ تكون المعادلة المزاملة لها هي

$$(xz)'' - z' + xz = 0 \Rightarrow xz'' + z' + xz = 0$$

وهي نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالي فهي متزاملة ذاتيا.

ملحوظة: إذا كتبنا المعادلة السابقة بعد القسمة على x على الصورة

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

تكون المعادلة المزاملة لها هي

$$z'' - \left(\frac{1}{x}z\right)' + z = 0$$

$$z'' - \frac{1}{x}z + \frac{1}{x^2}z + z = 0$$

وليس نفس صورة المعادلة الأصلية وبالتالى فهى غير متزاملة ذاتيا

وسنسرد النظريات التالية بدون برهان

نظرية (١):

الشرط الضرورى والكافى لكى تكون المعادلة (1) متزاملة ذاتيا هو

$$a_2'(x) = a_1(x)$$

نظرية (٢):

إذا كانت المعادلة التفاضلية (1) متزاملة ذاتيا فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

نظرية (٣):

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية (على الصورة(١)) تصبح متزاملة ذاتيا إذا ضربت فى العامل

$$\frac{1}{a_2(x)}\exp\left(\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right), \qquad a_2(x) \neq 0$$

<u>ملحوظة:</u> من نظرية (3) يتضح أنه ليس هناك نقص فى التعميم إذا كتبنا المعادلة المتزاملة ذاتيا

$$L(y) = (a_2(x)y')' + a_1(x)y = 0$$

على الصورة

$$L(y) = (p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad (3)$$

وتعرف المعادلة (3) بمعادلة "Sturm Liouville" وهى تلعب دورا كبيرا فى مسائل القيم الحدية.

مثال (٢)

ضع معادلة بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

فى الصورة المزاملة ذاتيا

الحل:

لدينا $$\frac{1}{a_2}\exp\left(\int\frac{a_1}{a_2}dx\right) = \frac{1}{x^2}\exp\int\frac{x}{x^2}dx = \frac{1}{x}$$

وبضرب المعادلة المعطاة فى $\frac{1}{x}$ نحصل على

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0$$

اى

$$(xy')' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0$$

وهى فى الصورة المزاملة ذاتيا.

٨ - إختزال الرتبة : Reduction of order

ليكن $y_1 = u(x)$ هو حلا للمعادلة التفاضلية

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

ونستخدم التحويل $y_2 = y = uv$ للحصول على الحل الثانى

حيث $v = v(x)$ دالة مجهولة يراد تحديدها. وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = \left(u(x)v(x)\right)' = u'v + uv' \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u''v + 2u'v' + uv'' \tag{3}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$a_2(x)\left[u''v + 2u'v' + uv''\right] + a_1(x)\left[u'v + uv'\right] + a_0(x)uv = 0$$

أو

$$a_2uv'' + \left(2a_2u' + a_1u\right)v' + \left(a_2u'' + a_1u' + a_0u\right)v = 0$$

وبالتالي فإن

$$a_2u\frac{d^2v}{dx^2} + \left(2a_2u' + a_1u\right)\frac{dv}{dx} = 0$$

وبوضع $w = \dfrac{dv}{dx}$ نحصل على

$$a_2u\frac{dw}{dx} + \left(2a_2u' + a_1u\right)w = 0 \tag{4}$$

وهي معادلة خطية ومنها

$$\frac{dw}{w} = -\left[2\frac{u'}{u} + \frac{a_1}{a_2}\right]dx$$

ويكون حلها هو

$$w = c \quad \exp\left[-\int -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx\right] \Big/ \left[u(x)\right]^2$$

اي ان

$$v = \int w dx = \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وباختيار $c = 1$ يكون الحل الثاني هو

$$y_2 = uv = y_1 \int \frac{\exp\left[-\int_0^x \frac{a_1}{a_2} ds\right]}{u^2(x)} dx$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$W(u, y_2) = \begin{vmatrix} u & y_2 \\ u' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & uv \\ u' & uv' + u'v \end{vmatrix} = u^2(x) v'$$

$$= \exp\left[-\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds\right] \neq 0$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاء هو

$$y = c_1 u + c_2 y_2$$

مثال

إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة التفاضلية

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

اوجد الحل الآخر المستقل خطيا بطريقة إختزال الرتبة.

الحل

حيث ان $y = x$ تحقق المعادلة المعطاة نفرض أن الحل الآخر هو $y_2 = x.v$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}=0$$

وبوضع $w=\frac{dv}{dx}$ نحصل على

$$x(x^2+1)\frac{dw}{dx}+2w=0$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية نحصل على

$$w=\frac{c(x^2+1)}{x^2}$$

وباختيار $c=1$ وبالتكامل نحصل على

$$v=x-\frac{1}{x}$$

ويكون الحل الثانى هو

$$y_2=x(x-\frac{1}{x})=x^2-1$$

وهذان الحلان مستقلان خطيا لأن

$$W(u,y_2)(x)=\begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2+1$$

$$=x^2+1\neq 0.$$

ويكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y=c_1x+c_2(x^2+1)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان .

تمارين

١) إثبت ان $y_1 = e^{x^2}, y_2 = e^{-x^2}$ حلان للمعادلة المتجانسة الناظرة للمعادلة

$$xy'' - y' - 4x^3y = 24x^3e^{2x^2}$$

وبإستخدام طريقة تغيير البارامترات أوجد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

٢) تحقق من ان كلا من $y_1 = x, y_2 = e^x$ حل للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x-1)y'' - xy' + y = \frac{(x-1)^2}{x} \qquad ; x \neq 1$$

٣) بالتحويل إلى الصورة القياسية ، أوجد الحل العام لكل من:

$i) xy'' - 2(x-1)y' + 2(5x-1)y = 0 \qquad ii) x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 3x^{3/2}\sin 3x$

$iii) x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \qquad iv) y'' + 2xy' + x^2y = 0$

$v) x^2y'' + xy' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$

٤) بإستخدام تحليل المؤثر ، أوجد الحل العام لكل من:

$i) \left[xD^2 - (x+2)D + 2\right]y = 0 \qquad ii) \left[xD^2 - (x+2)D + 2\right]y = x - 1$

$iii) \left[xD^2 - (3x+1)D + 3\right]y = 2(x-1)e^x$

$iv) \left[(x+1)D^2 - (3x+4)D + 3\right]y = (3x+2)e^{3x} \qquad ; D = \frac{d}{dx}$

٥) إثبت ان $xD^2 + (2-x)D - 1 = (D-1)(xD+1)$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة $xy'' + (2-x)y' - y = 2x - x^2$

٦) إذا علم أن $y_1(x) = e^{2x}$ حل للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة $(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 2(x+2)^2 e^{2x}; x \neq -2$ ، فأوجد الحل العام لهذه المعادلة بإستخدام صيغة آبل.

٧) تأكد من صحة أن $y_1(x) = \frac{1}{x}$ حل خاص للمعادلة $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ ، ثم أوجد الحل العام للمعادلة بإستخدام صيغة آبل.

٨) تحويل المعادلة بإستبدال المتغير المستقل أوجد الحل العام

(أ) $xy'' + (\sin x)y' - 2y\cos^3 x = 2\cos^5 x$ بإستخدام التعويض $z = \sin x$

(ب) $xy'' - y' + 4x^3 y = x^5$ (ج) $x^4 y'' + 3x^3 y' + x^2 a^2 y = 1$ ، a ثابت

(د) $xy'' + (2x^2 - 1)y' - 24x^3 y = 4x^3 \sin x^2$ بإستخدام التعويض $z = x^2$

(هـ) $y'' - y'\cot x - y\sin^2 x = \cos x - \cos^3 x$ (و) $y'' - y'\cot x - y\sin^2 x = 0$

٩) إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 e^x$$

إذا كان حل الدالة المتممة هو $ax + (b/x)$

١٠) تأكد من أن x, e^x هما حلين للمعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}, \qquad 0 < x < 1$$

ثم أوجد حلها العام

١١) إستخدم طريقة تغيير البارامترات لحل المعادلة

$$\left[(x-1)D^2-xD+1\right]y=(x-1)^2$$

إذا كان x, e^x هما حلان للمعادلة المتجانسة المناظرة.

١٢) أوجد حل المعادلات التالية بتحويلها إلى الصورة القياسية

$(i)\ y''-(2\tan x)y'+5y=0 \qquad (ii)\ y''-(2\tan x)y'+5y=\sec x . e^x$

$(iii)\ y''-\dfrac{2}{x}y'+(n^2+\dfrac{2}{x^2})y=0 \qquad (iv)\ x\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)-2x\dfrac{dy}{dx}+2y+x^2y=0$

$(v)\ \dfrac{d}{dx}\left(\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}\right)+y\cos^2 x=0 \qquad (vi)\ (y''+y)\cot x+2(y'+y\tan x)=\sec x.$

١٣) أوجد حل المعادلات التالية بإستخدام المؤثرات

$(i)\ \left[xD^2+(1-x)D-1\right]y=e^x \qquad i.e.\left[(xD+1)(D-1)\right]y=e^x$

$(ii)\ \left[(x+2)D-1\right](D-2)y=(x+1)e^2 \qquad (iii)\ (xD-2)(D+1)y=x^3$

$(iv)\ (xD-2)(D-1)y=x^2 \qquad (v)\ \left[(x+3)D-1\right](D-2)y=(x+3)^2e^x$

$(vi)\ (xD-1)(D+1)y=x^2$

١٤) إثبت أن المعادلات التالية تامة وأوجد حلها

$(i)\ x(1+x)y''+(x-1)y'-y=x^2 \qquad (ii)\ (1-x^2)y''+(1-3x)y'-y=0$

$(iii)\ xy''+(3+2x)y'+2y=2+e^{-2x} \qquad (iv)\ y''+\cos xy'-y\sin x+2y\sin x=0$

$(v)\ (\sin^2 x)y''=2y \qquad (vi)\ xy''+(1-x)y'-y=e^x$

$(vii)\ x^2y''+3xy'+y=\dfrac{1}{(1-x)^2}.$

١٥) أكتب المعادلة المزاملة لكل من

$$(i)\ y'' + 6xy' - 2y = 0, \qquad (ii)\ xy'' + y' - 5y = 0$$

$$(iii)\ x^2 y'' + (5x+1)y' + 6y = 0, \qquad (iv)\ y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0$$

١٦) ضع المعادلات التالية في صورة المعادلات المتزاملة ذاتيا

$$(i)\ xy'' + y' + 3y = 0, \qquad (ii)\ 4y'' + 2y' - 6y = 0$$

$$(iii)\ x^2 y'' + xy' + (x^2+1)y = 0, \qquad (iv)\ y'' - y' \tan x + 2y \sec x = 0$$

١٧) إذا كان $u(x), v(x)$ دالتين لها مشتقات متصلة حتى الرتبه الثانية

وكان $\quad L(y) = \left(p(x)y'\right)' + q(x)y$

أثبت أن

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx}\left[p(uv' - u'v)\right]$$

تسمى هذ العلاقه بمتطابقه لاجرانج.

١٨) إذا كان $u(x), v(x)$ حلين للمعادلة المتزاملة ذاتيا

$$L(y) = \left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$$

فاثبت أن

$$p(x)\left[uv' - u'v\right] = k, \qquad k = \text{ثابت}$$

تعرف هذه العلاقة بصيغة أبل (Abel's formula)

(تنوية يلاحظ أن المقدار داخل القوس هو الرونسكيان وأن كل من الحلين تحقق المعادلة ثم ضرب الأولى في $-v$ والثانية في u والجمع وبالتكامل ينتج المطلوب)

١٩) إثبت أن الثابت k في صيغة آبل السابقة يساوي صفرا إذا كان وفقط إذا كان الحلان u, v لمعادلة ستورم _ ليوفيل مرتبطين خطيا.

٢٠) إذا كان $y = x$ هو أحد حلول المعادلة

$$(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا باختزال الرتبة.

٢١) إذا كان $y = e^{2x}$ هو أحد حلول المعادلة

$$(2x + 1)y'' - 4(x + 1)y' + 4y = 0$$

أوجد الحل الآخر المستقل خطيا وذلك باختزال الرتبة.

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنيوس)

Series Solutions of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

الباب الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

باستخدام المتسلسلات (طريقة فروبنيوس)

Series Solution of Second Order Differential Equations (Frobenious Method)

١ - مقدمة :

بعض الخواص على العلاقات التجميعية $\sum$

١ - $$\sum_{n=p}^{k} Q(n) = Q(p) + Q(p+1) + Q(P+2) + \dots + Q(k); \quad k > p$$

حيث p ، k أعداد صحيحة.

٢ - $$\sum_{n=p}^{\infty} Q(n) a_n x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} Q(n-p) a_{n-p} x^n$$

ومثال ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 a_n x^{n-2} + n a_n x^{n+5}) = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)^2 a_{n+2} x^n + \sum_{n=5}^{\infty} (n-5) a_{n-5} x^n$$

٣ - إذا كان $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإن $a_n = b_n$ لجميع قيم n

وأيضاً

إذا كان $$\sum (a_n - b_n) x^n = 0$$

فإن $a_n - b_n = 0$

ومثال ذلك

إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^n = C_0 x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + ... + C_n x^{n+1}$$

فإن

$$\therefore C_1 = C_0 \ , \ 2C_2 = C_1 \ , \ 3C_3 = C_2 \ , \ ..., nC_n = C_{n-1} \ ,$$

أي

$$\therefore C_1 = C_0 \ , \ C_2 = \frac{C_0}{2!} \ , \ C_3 = \frac{C_0}{3!} \ , ..., C_n = \frac{C_0}{n!} \ .$$

تعريف: متسلسلة قوى حول $x = a$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

أما إذا كانت المتسلسلة حول $x = 0$ فإن

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

تعريف:

نفترض أن المعادلة

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

حيث كل من $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ دوال تحليلية في x (أي يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسة قوى في x) فإن :

١) $x = a$ تسمى بنقطة عادية Ordinary point إذا كان $p_0(a) \neq 0$

٢) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة أو مفردة Singular point إذا كان $p_0(a) = 0$

٣) $x = a$ تسمى بنقطة شاذة منتظمة Regular Singular Point

إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة وكان

$$\lim_{x \to a} \frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-a) \ , \quad \lim_{x \to a} \frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x-a)^2$$

موجودتان

مثال

صنف النقط الشاذة في المعادلة

$$x(x-1)^2(x+2)y'' + x^2y' - (x^3+2x-1)y = 0$$

الحل

$$p_0(x) = x(x-1)^2(x+2),\ \ p_1(x) = x^2,\ \ p_2(x) = -(x^3+2x-1)$$

$p_0(x) = 0$ إذا كان $x = 0,\ x = 1,\ x = -2$

نقط شاذة أما النقاط الأخرى فهي نقط عادية . وندرس الآن النقاط الشاذة .

$(i)\ x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}x = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{p_2(x)}{p_0(x)}x^2 = \lim_{x\to 0}-\frac{x(x^3+2x-1)}{(x-1)^2(x+2)} = 0$$

$\therefore\ x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

$(ii)\ x = 1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x-1) = \infty$$

$\therefore\ x = 1$ نقطة شاذة غير منتظمة

$(iii)\ x = -2$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}(x+2) = \lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x(x-1)^2} = \frac{-2}{9}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{p_2(x)}{p_0(x)}(x+2)^2 = \lim_{x\to -2}\frac{-(x^3+2x-1)(x+2)}{x(x-1)^2} = 0$$

$\therefore\ x = -2$ نقطة شاذة منتظمة

٢ - طريقة فروبنيوس:

لقد سبق دراسة حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية في صورة متسلسلة القوى في حالة إذا كانت $x = a$ نقطة عادية في الجزء الأول ، والآن سوف ندرس حالة إذا كانت $x = a$ نقطة شاذة منتظمة ، وفي هذه الحالة نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^{n+r}$$

أما إذا كان الحل حول النقطة $x = 0$ الشاذة المنتظمة فإن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

ملحوظة:

إن لم تذكر النقطة فإننا نعتبر $x = 0$.

وسوف نوضح طريقة الحل بالمثال الآتي

مثال (١)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x .

الحل

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x}{2x} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x} = 0$$

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}\ ,\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}2C(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}3C_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(2n+2r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r+3)x^{n+r}=0$$

بمساواة معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل قوى x)

$$C_n(n+r)(2n+2r-1)+C_{n-1}(n+r+2)=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$ في المعادلة (1) فنحصل على

$$C_0 r(2r-1)+C_{-1}(r+2)=0$$

حيث إن $C_{-1}=C_{-2}=\ldots=0$

فإن

$$C_0 r(2r-1)=0$$

وباعتبار ان $C_0\neq 0$ نحصل على

$$r(2r-1)=0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تسمى المعادلة الدليلية (indicial equation) ومنها نجد ان

$$r=0\ ,\quad r=\frac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على العلاقة التكرارية (recurrence relation)

$$C_n=\frac{-(n+r+2)}{(n+r)(2n+2r-1)}C_{n-1}\ ,\qquad n\geq 1$$

وسوف نوجد قيم C_n المختلفة بدلالة $C_0\neq 0$ في حالتي جذري المعادلة الدليلية (2)

١) $r = 0$:

$$\therefore C_n = \frac{-(n+2)}{n(2n-1)} C_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

$$\therefore C_1 = \frac{-3}{1(1)} C_0 = -3C_0$$

$$C_2 = \frac{-4}{2(3)} C_1 = \frac{(-4)(-3)}{(2)(3)} C_0 = 2C_0$$

$$C_3 = \frac{-5}{(3)(5)} C_2 = \frac{(-5)(2)}{(3)(5)} C_0 = \frac{-2}{3} C_0, \ldots$$

٢) $r = \frac{1}{2}$:

$$C_n = \frac{-(n+5/2)}{(n+1/2)} C_{n-1}$$

$$\text{or } C_n = \frac{-(2n+5)}{2n(2n++1)} C_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{-7}{2(3)} C_0 = \frac{-7}{6} C_0$$

$$C_2 = \frac{-9}{(4)(5)} C_1 = \frac{9(7)}{(4)(5)(6)} C_0 = \frac{21}{40} C_0$$

$$C_3 = \frac{-11}{(6)(7)} C_2 = \frac{(-11)(21)}{(6)(7)(40)} C_0 = \frac{-11}{80} C_0, \ldots$$

وبفرض $C_0 = 1$ فإن الحل العام يكون

$$y = A_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2}$$

$$\therefore y = A_1[1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots] + A_2[1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots]x^{1/2}.$$

ملحوظة :

في المثال السابق لاحظنا عند حل المعادلة الدليلية أن جذري المعادلة $r=\frac{1}{2}$, $r=0$ أي انهما مختلفان والفرق بينهما عدد كسري ، وسوف نلاحظ ان هناك ثلاث حالات لجذري المعادلة الدليلية ، كما يأتي

حالات جذري المعادلة الدليلية :

١) مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.

٢) متساويان.

٣) مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

الحالة الاولى :

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد كسري.

لقد درسنا الحالة الأولى في المثال السابق ، ونعرض مثالا أخر

مثال (٢)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

في صورة متسلسلة قوي في x .

الحل

نرى أن $x=0$ نقطة شاذة وحيث ان

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)x}{2x(1-x)}=\frac{1}{2} \quad , \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x(1-x)}=0$$

فإن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض ان الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}3C_n x^{n+r}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر

$$\therefore\ 2C_n(n+r)(n+r-1)-2C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2)+$$
$$C_n(n+r)-C_{n-1}(n+r-1)+3C_{n-1}=0$$
$$\therefore\ (n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}[(n+r-1)(2n+2r-3)-3]=0$$
$$\therefore\ C_n(n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}[2(n+r)^2-5(n+r)]=0$$
$$\therefore\ C_n(n+r)(2n+2r-1)-C_{n-1}(n+r)(2n+2r-5)=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$

$$\therefore\ C_0 r(2r-1)-C_{-1}r(2r-5)=0$$

حيث $C_{-1}=0$ و $C_0\neq 0$ إختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي

$$r(2r-1)=0$$
$$\therefore\ r=0\ ,\ \tfrac{1}{2}$$

من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore C_n = \frac{(n+r)(2n+2r-5)}{(n+r)(2n+2r-1)} C_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

بالتعويض عن جذري المعادلة الدليلية

١) $r = 0$

$$\therefore \quad C_n = \frac{n(2n-5)}{n(2n-1)} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{2n-5}{2n-1} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-3}{1} C_0 = -3C_0 \quad , \quad C_2 = \frac{-1}{3} C_1 = C_0 \quad , \quad C_3 = \frac{1}{5} C_2 = \frac{1}{5} C_0 \quad , \quad \dots \; .$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = [1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5} x^3 + \dots] C_0$$

٢) $r = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad C_n = \frac{(n+\frac{1}{2})(2n-4)}{(n+\frac{1}{2})(2n)} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{n-2}{n} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{-1}{1} C_0 = -C_0 \quad , \quad C_2 = 0 = C_3 = C_4 = \dots$$

$$\therefore \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1/2} = [1 - x] C_0 x^{1/2}$$

حيث إن C_0 إختيارية ،نعتبر $C_0 = 1$

$\therefore$ الحل العام يكون على الصورة

$$y = A[1 - 3x + x^2 + \frac{1}{5} x^3 + \dots] + B[1 - x]\sqrt{x}$$

حيث A , B ثابتان إختياريان

الحالة الثانية :

الجذران متساويان

في هذه الحالة نجد $r = r_2$ ، $r = r_1$ أي أن $r_1 = r_2$ ويكون $y_1 = \sum C_n x^{n+r_1}$ وبذلك تحصل على حل واحد فقط ، لكن للحصول على الحل الثاني المستقل خطيا ، نفرض $y_1 = f(x, r_1)$ ؛ ولقد ثبت أن الحل الثاني يكون على الصورة

$$y_2 = \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان إختياريان،

مثال (٢)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$$

في صورة متسلسلة قوى في x .

الحل

نرى أن $x = 0$ نقطة شاذة وعلى ذلك فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}x = 3 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)x^2}{x^2} = 1$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة .

نفترض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

$$\therefore y'=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)x^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة ، نحصل على

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r)x^{n+r}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r+1}=0$$

بمساواة معامل x^{n+r} بالصفر (أقل أس)

$$\therefore C_n(n+r)(n+r-1)+3C_n(n+r)+C_n-2C_{n-1}=0$$

$$\therefore C_n[(n+r)(n+r+2)+1]=2C_{n-1}$$

$$\therefore C_n(n+r+1)^2=2C_{n-1} \qquad (1)$$

بوضع $n=0$

$$\therefore C_0(r+1)^2=2C_{-1}$$

حيث $C_{-1}=0$ ، $C_0\neq 0$ اختيارية

$$\therefore r=-1,-1$$

أي أن جذري المعادلة الدليلية متساويان

من (1) نحصل على العلاقة التكرارية :

$$C_n=\frac{2}{(n+r+1)^2}C_{n-1} \quad , \quad n\geq 1$$

نوجد قيم $C_1, C_2, C_3, \ldots$ بدلالة r

$$\therefore C_1 = \frac{2}{(r+2)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{2}{(r+3)^2} C_1 = \frac{2^2}{[(r+2)(r+3)]^2} C_0$$

$$C_3 = \frac{2}{(r+4)^2} C_2 = \frac{2^3}{[(r+2)(r+3)(r+4)]^2} C_0$$

.

.

$$C_n = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)(r+4)\dots(r+n+1)]^2} C_0$$

وبافتراض $C_0 = 1$ حيث انها اختيارية ويكون الحل الأول كما يأتي

$$x > 0 \quad , \quad y_1(x,r) = x^r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(r) x^{n+r}$$

حيث إن

$$C_n(r) = \frac{2^n}{[(r+2)(r+3)\dots(r+n+1)]^2} \quad , \quad n \geq 1$$

$$y_1(x,r) = x^r \left[1 + \frac{2}{(r+2)^2} x + \frac{2^2}{(r+2)^2 (r+3)^2} x^2 + \frac{2^3}{(r+2)^2 (r+3)^2 (r+4)^2} x^3 + \dots \right]$$

$$y_1(x,-1) = x^{-1} \left[1 + 2x + x^2 + \frac{2}{9} x^3 + \dots \right]$$

كما أن

$$\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r} = x^r \ln x\left[1+\frac{2}{(r+2)^2}x+\frac{2^2}{(r+2)^2(r+3)^2}x^2+\dots\right]$$

$$+x^r\left[\frac{-4}{(r+2)^3}x-4\left[\frac{2^2}{(r+2)^3(r+3)^2}+\frac{2}{(r+2)^2(r+3)^3}\right]x^2+\dots\right]$$

$$y_2(x,-1)=\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r}\Big|_{r=-1} = x^{-1}\ln x\left[1+2x+x^2+\frac{2}{9}x^3+\dots\right]+$$

$$x^{-1}\left[-4x-4\left[\frac{2}{4}+\frac{2}{8}\right]x^2+\dots\right]$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore\ y=(A+B\ln x)x^{-1}\left[1+2x+x^2+\frac{2}{9}x^3+\dots\right]-Bx^{-1}\left[4x+3x^2+\dots\right]$$

الحالة الثالثة :

الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب

في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة الدليلية r_1, r_2 حيث $r_2 > r_1$ فإن $r_2 - r_1$ يكون عدداً صحيحاً موجباً .

في هذه الحالة يعطى r_2 (أكبر الجذرين) حلاً ، وليكن y_2 في حين يعطى الجذر r_1 حلاً وقد لا يعطي ، في حالة إذا وجد الحل y_1 من r_1 فإن الحل العام يكون

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

بينما في حالة أن r_1 لايعطي حلاً فإننا نضع $C_0 = b_0(r - r_1)$ في الحل الناتج ، وليكن الحل بعد التعويض ، على الصورة $\bar{y}$ فإن الحل العام يكون

$$y = A\,\bar{y}\Big|_{r=r_1} + B\,\frac{\partial \bar{y}}{\partial r}\Big|_{r=r_1}$$

حيث r_1 أصغر الجذرين

مثال (٤)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

في صورة متسلسلة قوى x.

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة فإن

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{-3x}{x} = -3 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = 0$$

$\therefore x = 0$ نقطة شاذة منتظمة .

نفترض الحل على الصورة

$$\therefore \; y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad , \; y' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n (n+r) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

بمساواة معامل x^{n+r-1} بالصفر نحصل على

$$C_n (n+r)(n+r-4) + C_{n-2} = 0 \qquad (1)$$

بوضع $n = 0$ ، تصبح (1) على الصورة

$$C_0 r(r-4) + C_{-2} = 0$$

وحيث إن $C_{-2} = 0$ ، $C_0 \neq 0$ اختيارية

∴ المعادلة الدليلية تكون على الصورة

$r(r-4)=0$ أي $r_1=0$, $r_2=4$

نلاحظ ان $r_2-r_1=4$ (عدد صحيح موجب)

وتكون العلاقة التكرارية من (1) هي

$$C_n=-\frac{1}{(n+r)(n+r-4)}C_{n-2} \quad , \quad n\ge 2$$

واضح أن $C_1=0$ بوضع $n=1$ وبالتالي فإن $C_{2n+1}=0$ أي أن جميع المعاملات الفردية تتلاشى

$$C_2=-\frac{1}{(r-2)(r+2)}C_0$$

$$C_4=-\frac{1}{r(r+4)}C_2=\frac{(-1)^2}{(r-2)r(r+2)(r+4)}C_0 \; ....$$

$$C_6=-\frac{1}{(r+6)(r+2)}C_4=\frac{-1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)}C_0$$

وبالتالي فإن الحل بدلالة r يكون على الصورة

$$y(x,r,C_0)=C_0x^r[1-\frac{1}{(r-2)(r+2)}x^2+\frac{1}{(r-2)r(r+2)(r+4)}x^4-$$
$$\frac{1}{(r-2)r(r+2)^2(r+4)(r+6)}x^6+...]$$

نلاحظ عند وضع $r=4$ فإن كل المعاملات تكون معرفة لكن عند وضع $r=0$ فإن كل المعاملات بدءاً من معامل x^4 تكون غير معينة (غير محددة) لذلك نضع $C_0=b_0(r-0)\Leftarrow C_0=b_0r$ نحصل على

$$\bar{y} = b_0 x^r [r - \frac{r}{(r-2)(r+2)} x^2 + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} x^4$$
$$- \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)(r+6)} x^6 + \ldots]$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = \bar{y}|_{r=0}$$
$$= b_0[-\frac{1}{16} x^4 + \frac{1}{(16)(12)} x^6 - \ldots]$$
$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial r} = \bar{y} \ln x + b_0 x^r [1 - (\frac{1}{(r-2)(r+2)} - \frac{r}{(r-2)^2(r+2)} - \frac{r}{(r-2)(r+2)^2}) x^2 -$$
$$(\frac{1}{(r-2)^2(r+2)(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)} + \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)^2}) x^4 + \ldots]$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial r}|_{r=0} = y_1 \ln x + b_0 \left[1 - (\frac{-1}{4}) x^2 - (\frac{1}{32} + \frac{-1}{32} + \frac{-1}{64}) x^4 + \ldots \right]$$
$$= y_1 \ln x + b_0 \left[1 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 + \ldots \right]$$

ويكون الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

على ذلك فإن

$$y = (A + B \ln x)(\frac{-x^4}{16} + \frac{x^6}{192} - \ldots) + B(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \ldots)$$

حيث A ، B ثابتان اختياريان

مثال (٥)

أوجد حل المعادلة التالية فى صورة متسلسلة لا نهائية

$$(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{x(1-x)} = -3 \;,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x(1-x)} = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n(n+r)x^{n+r-1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر (أقل أس في المعادلة) نجد أن

$$C_n(n+r)(n+r-1) - C_{n-1}(n+r-1)(n+r-2) - 3C_n(n+r) + 2C_{n-1} = 0$$
$$C_n(n+r)(n+r-4) - C_{n-1}(n+r)(n+r-3) = 0 \qquad (1)$$

بوضع $n = 0$ في (1) فنحصل على

$$\therefore\; C_0 r(r-4) - C_{-1} r(r-3) = 0$$

حيث $C_{-1} = 0$ و $C_0 \neq 0$ أختيارية

$\therefore$ المعادلة الدليلية هي

$$r(r-4) = 0 \Rightarrow r = 0 \,,\; r = 4$$

أي أن الفرق بين جذري المعادلة الدليلية عدد صحيح موجب (الحالة الثالثة) و على ذلك ومن (1) فإن العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{(n+r)(n+r-3)}{(n+r)(n+r-4)} C_{n-1}$$

$$C_n = \frac{n+r-3}{n+r-4} C_{n-1} \quad , n \geq 1$$

$$C_1 = \frac{r-2}{r-3} C_0$$

$$C_2 = \frac{r-1}{r-2} C_1 = \frac{r-1}{r-2} \cdot \frac{r-2}{r-3} C_0 = \frac{r-1}{r-3} C_0$$

$$C_3 = \frac{r}{r-1} C_2 = \frac{r}{r-1} \cdot \frac{r-1}{r-3} C_0 = \frac{r}{r-3} C_0$$

$$C_4 = \frac{r+1}{r-3} C_0 \;,\; C_5 = \frac{r+2}{r-3} C_0 \;, \ldots$$

نفترض أن $C_0 = 1$ نحصل على

$$y(x,r) = x^r \left[1 + \frac{r-2}{r-3} x + \frac{r-1}{r-3} x^2 + \frac{r}{r-3} x^3 + \frac{r+1}{r-3} x^4 + \frac{r+2}{r-3} x^5 + \ldots \right]$$

حيث إن جميع المعاملات معرفة عند $r = 0$ (الجذر الأصغر) على ذلك فإن

$$y_1 = y(x,4) = x^4 \left[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots \right]$$

ملحوظة يمكن كتابة الحل y_1 على الصورة

$$y_1 = \frac{x^4}{(1-x)^2} \;,\; |x| < 1$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = y(x,0) = \left[1 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{3} x^2 + 0 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{3} x^5 - \frac{3}{3} x^6 - \frac{4}{3} x^7 - \ldots \right]$$

$$= 1 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} y_1 .$$

أي أن الحل العام

$$y = Ay_1 + By_2$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

$$y = Ay_1 + B[1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y_1]$$

$$y = Cx^4[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...] + B[1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2]$$

حيث $C = A - \frac{1}{3}B$

مثال (٦)

اثبت أن حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' - y = 0$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = (A + B\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2} - 2B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}H_n$$

حيث A, B ثابتان أختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \ , \quad \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x} = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r} = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n+r-1} بالصفر فنحصل على

$$\therefore\ C_n(n+r)(n+r)-C_{n-1}=0 \qquad (1)$$

نضع $n=0$ في (1) نحصل على

$$\therefore\ C_0 r^2 - C_{-1} = 0$$

حيث إن $C_0 \neq 0,\ C_{-1}=0$ اختيارية

$\therefore$ وتكون المعادلة الدليلية

$$r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,0$$

$\therefore$ الجذران متساويان

من (1) ، نحصل على العلاقة التكرارية

$$C_n = \frac{1}{(n+r)^2} C_{n-1} \qquad , \ n \geq 1$$

نوجد قيم $C_1, C_2, C_3, \ldots$ بدلالة r

$$\therefore C_1 = \frac{1}{(r+1)^2} C_0$$

$$C_2 = \frac{1}{(r+2)^2} C_1 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2} C_0$$

$$\therefore C_3 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2} C_0 \quad , \quad C_4 = \frac{1}{(r+1)^2 (r+2)^2 (r+3)^2 (r+4)^2} C_0 \ , \ \ldots$$

وبافتراض أن $C_0 = 1$ ، يكون الحل الأول هو

$$y_1(x,r)=x^r[1+\frac{1}{(r+1)^2}x+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}x^2+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}x^3+$$
$$\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2}x^4+...]$$

$$\therefore y_1=y_1(x,r)\big|_{r=0}=1+\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^2}+\frac{x^4}{(4!)^2}+...=\sum_{n=0}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2(x,r)=\frac{\partial y_1(x,r)}{\partial r}=x^r\ln x[1+\frac{1}{(r+1)^2}x+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}x^2+...]$$
$$+x^r(\frac{-2}{(r+1)^3}x-2[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2}+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3}]x^2-$$
$$2[\frac{1}{(r+1)^3(r+2)^2(r+3)^2}+\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^3(r+3)^2}+$$
$$\frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^3}]x^3...]$$

$$y_2(x,r)=y_1\ln x-2x^r[\frac{x}{(r+1)^2}\frac{1}{(r+1)}+\frac{x^2}{(r+1)^2(r+2)^2}(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2})$$
$$+\frac{x^3}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}(\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+3})+...]$$

$$y_2=y_2(x,r)\big|_{r=0}=y_1\ln x-2[\frac{x}{(1!)^2}\frac{1}{1}+\frac{x^2}{(2!)^2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2})+\frac{x^3}{(3!)^2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+...]$$

أي أن

$$=y_1\ln x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

على ذلك فإن حل المعادلة يمكن كتابته على الصورة

$$y=(A+B\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}-2B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}H_n$$

حيث A , B ثابتان اختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ايجاد حل المعادلة التفاضلية في متسلسلة القوى في حالة x كبيرة جداً

فيما سبق درسنا حل المعادلة التفاضلية

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

في حالة متسلسلة القوى بجوار $x = a$ ، ولتكن $x = 0$ أي لقيم محدود للمتغير x وكانت $x = 0$ إما أن تكون نقطة عادية أو نقطة مفردة منتظمة.

ماذا عن الحل إذا كانت $x = 0$ ، نقطة مفردة غير منتظمة ، نبحث عن الحل عندما تكون x كبيرة جداً ، نفرض أن $w = \frac{1}{x}$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية إذا كانت $w = 0$ نقطة عادية أو مفردة منتظمة فإن x عند اللا نهاية تكون نقطة عادية أو مفردة منتظمة وتحل المعادلة ، بالطرق السابقة، حيث نلاحظ أن w صغيرة جداً ، تعني أن x كبيرة جداً ، ونقول إذا كانت $w = 0$ نقطة عادية (مفردة منتظمة) للمعادلة المحولة من (1) فإن المعادلة (1) لها نقطة عادية (مفردة منتظمة) في اللانهاية.

مثال (٧)

أوجد حلول المعادلة التفاضلية التالية التي تحقق لقيم x الكبيرة جداً

$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \qquad (1)$$

الحل

حيث إن $x = 0$ نقطة شاذة

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3x-1)x}{x^2} = -\infty$$

أي ان $x = 0$ نقطة شاذة غير منتظمة.

لإيجاد الحلول بدلالة قيم x كبيرة جداً

نضع

$$w = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{w}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} = -w^2\frac{dy}{dw} \quad ...$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right)\frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2}\left[-w^2\frac{d^2y}{dw^2} - 2w\frac{dy}{dw}\right] = w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه

$$\therefore \frac{1}{w^2}\left[w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}\right] + \left[\frac{3}{w} - 1\right]\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right) + y = 0$$

او

$$w^2\frac{d^2y}{dw^2} - w(1-w)\frac{dy}{dw} + y = 0 \qquad (2)$$

وعلى ذلك فإن $w = 0$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (2)

وبالتالي فإن النقطة عند اللانهاية تكون نقطة شاذة منتظمة للمعادلة (1)

$\therefore$ نفترض ان $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r}$ حلاً للمعادلة (2)

بالتعويض في (2) فنحصل على

$$\sum C_n(n+r)(n+r-1)w^{n+r}-\sum C_n(n+r)w^{n+r}+\sum C_n(n+r)w^{n+r+1}+\sum C_n w^{n+r}=0$$

بمساواة مجموع معاملات w^{n+r} بالصفر (اقل اس في المعادلة)

$$C_n(n+r)(n+r-1)-C_n(n+r)+C_n+C_{n-1}(n+r-1)=0$$

$$C_n(n+r-1)^2+C_{n-1}(n+r-1)=0 \qquad (3)$$

نضع $n=0$

$$\therefore C_0(r-1)^2+C_{-1}(r-1)=0$$

وحيث $C_{-1}=0$ ، $C_0\neq 0$ اختيارية

$\therefore$ وتكون المعادلة الدليلية $(r-1)^2=0$

$$\therefore r=1,1$$

من المعادلة (3) ، تنتج العلاقة التكرارية

$$C_n=\frac{-1}{n+r-1}C_{n-1}\quad ,\ n\geq 1$$

$$\therefore C_1=\frac{-1}{r}C_0$$

$$C_2=\frac{-1}{r+1}C_1=\frac{(-1)^2}{r(r+1)}C_0$$

$$C_3=\frac{-1}{r+2}C_2=\frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)}C_0,\ldots$$

بإختيار $C_0=1$ ومن ذلك، فإن

$$y_1(w,r) = w^r[1 - \frac{1}{r}w + \frac{(-1)^2}{r(r+1)}w^2 + \frac{(-1)^3}{r(r+1)(r+2)}w^3 + ...]$$

$$y_1 = y_1(w,1) = w[1 - w + \frac{(-1)^2 w^2}{2!} + \frac{(-1)^3 w^3}{3!} + ...]$$

$$= w\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}w^n$$

للحصول على الحل الثاني نوجد :

$$\frac{\partial y_1(w,r)}{\partial r} = y_1(w,r)\ln w + w^r[\frac{1}{r^2}w - \frac{1}{r(r+1)}(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1})w^2$$

$$+ \frac{1}{r(r+1)(r+2)}(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2})w^3 ...]$$

$$\frac{\partial y_1(w,r)}{\partial r}\Big|_{r=1} = y_1\ln w + w[w - \frac{w^2}{2!}(1+\frac{1}{2}) + \frac{w^3}{3!}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + ...].$$

وباعتبار $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ فإن

$$y_2 = y_1\ln w + w_2[H_1 - \frac{w}{2!}H_2 + \frac{w^2}{3!}H_3 - ...]$$

$$= y_1\ln w + w^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}w^{n-1}}{n!}H_n$$

أي أن حل المعادلة (2) هو

$$y = (A + B\ln w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}w^{n+1} - B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}H_n w^{n+1}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان ، $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

أي أن حل المعادلة (1) هو

$$y = [A + B\ln(\frac{1}{x})]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{-n-1}}{n!} - B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n x^{-n-1}}{n!}$$

مثال (8)

حل المعادلة $4x^3y'' + 6x^2y' + y = 0$

لقيم x الكبيرة جداً

الحل

نرى ان $x = 0$ نقطة شاذة ، وعلى ذلك فإن ،

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{4x^3} x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1(x-0)^2}{4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{4x} = \infty$$

اي ان $x = 0$ نقطة شاذة غير منتظمة

لذلك نضع

وعلى ذلك فإن $w = \frac{1}{x}$ ومنها $x = \frac{1}{w}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2} \frac{dy}{dw} = -w^2 \frac{dy}{dw}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dw}(-w^2 \frac{dy}{dw}) \frac{dw}{dx} = \frac{-1}{x^2}(-w^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2w \frac{dy}{dw})$$

$$= w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\therefore \frac{4}{w^3}(w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3 \frac{dy}{dw}) + \frac{6}{w^2}(-w^2 \frac{dy}{dw}) + y = 0$$

$$4w \frac{d^2y}{dw^2} + 2 \frac{dy}{dw} + y = 0$$

وحيث نلاحظ ان $w = 0$ نقطة شاذة منتظمة

نفترض أن الحل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+r} \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$y' = \sum C_n (n+r) w^{n+r-1},$$

$$y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-2}$$

$$\therefore \quad 4\sum C_n (n+r)(n+r-1) w^{n+r-1} + 2\sum C_n (n+r) w^{n+r-1} + \sum C_n w^{n+r} = 0$$

$$\therefore \quad C_n [4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)] + C_{n-1} = 0$$

$$C_n (n+r)(4n+4r-2) + C_{n-1} = 0 \qquad (1)$$

حيث $C_{-1} = 0$ ، $C_0 \neq 0$ ، بوضع $n = 0$

$$C_0 (r)(4r-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 , r = \frac{1}{2}$$

من العلاقة الرجعية (1) نحصل على

$$C_n = \frac{-1}{(n+r)(4n+4r-2)} C_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

وبالتعويض في العلاقة التكراريه

$(i)\ r = 0$

$$C_n = \frac{-1}{n(4n-2)} C_{n-1} = \frac{-1}{2n(2n-1)} C_{n-1}$$

$$C_1 = \frac{-1}{2.1} C_0 \quad , \quad C_2 = \frac{-1}{3.4} C_1 = \frac{(-1)^2}{4!} C_0$$

$$C_3 = \frac{-1}{6.5} C_2 = \frac{(-1)^3}{6.5.4!} C_0 \ ,\ldots$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1(w,0)=C_0[1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\frac{w^3}{6!}+...]$$

$(ii)\ \ r=\frac{1}{2}$

$$C_n=\frac{-1}{(n+\frac{1}{2})(4n+4.\frac{1}{2}-2)}C_{n-1}\ \ ,\quad n\geq 1$$

$$=\frac{-1}{(2n+1)(2n)}C_{n-1}$$

$$C_1=\frac{-1}{2.3}C_0\ \ ,\ C_2=\frac{-1}{4.5}C_1=\frac{(-1)^2}{5!}C_0$$

$$C_3=\frac{-1}{6.7}C_2=\frac{(-1)^3}{7!}C_0$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2=C_0w^{\frac{1}{2}}[1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\frac{w^3}{7!}+...]$$

وبأخذ $C_0=1$ يكون حل المعادلة الأصلية هو

$$y=Ay_1+By_2$$

$$=A[1-\frac{x^{-1}}{2!}+\frac{x^{-2}}{4!}-\frac{x^{-3}}{6!}+...]+Bx^{-\frac{1}{2}}[1-\frac{x^{-1}}{3!}+\frac{x^{-2}}{5!}-\frac{x^{-3}}{7!}+...]$$

حيث A ، B ثابتان اختياريان.

مثال(٩)

إثبت ان $x=\infty$ نقطة شاذة منتظمة للمعادلة

$$x^2y''+4xy'+2y=0 \qquad (1)$$

الحل

لنكن $x = 1/t$ أى $t = 1/x$ ومنها $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ (٢)

وبذلك يكون

(3) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2 \frac{dy}{dt}$$

(4) $$y'' = \left(-t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt}\right)(-t^2) = t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}$$

وبذلك تؤول المعادلة (1) إلى

$$\frac{1}{t^3}\left[t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}\right] + \frac{4}{t}\left[-t^2 \frac{dy}{dt}\right] + 2y = 0$$

أو

(5) $$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

وفيها نرى أن $t = 0$ نقطة شاذة منتظمة وعلى ذلك فإن $x = \infty$ نقطة شاذة منتظمة.

مثال (١٠)

أوجد حل المعادلة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

في صورة متسلسلة القوى حول $x = \infty$

الحل

لدينا

(1) $$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

بوضع

$$x=\frac{1}{t} \quad \therefore \quad t=\frac{1}{x}, \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{-1}{x^2} \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=t^2\left(2t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right) \tag{4}$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+6y=0 \tag{5}$$

نرى أن $t=0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟) ، وعلى ذلك نفترض أن حل المعادلة (5) على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^{n+r}, \quad C_0\neq 0 \tag{6}$$

بالتعويض في المعادلة ومساواة معامل أقل قوى t بالصفر نحصل على العلاقة التكرارية

$$(n+r-3)(n+r+2)C_n-(n+r-2)(n+r-1)C_{n-2}=0$$

وبوضع $n=0$ نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0(r-3)(r+2)=0$$

$$\therefore\ r=3\ ,\quad r=-2$$

الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح.

من العلاقة التكرارية نجد أن

$$C_n=\frac{(n+r-2)(n+r-1)}{(n+r-3)(n+r+2)}C_{n-2}\ , \quad n\geq 2$$

من ذلك نرى أن

$$C_1 = C_3 = C_5 = \ldots = 0$$

$$C_2 = \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} C_0$$

$$C_4 = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+1)(r+4)(r+6)} C_0$$

$$= \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} C_0 ،$$

وهكذا ، وبذلك يكون الحل على الصورة

$$y = t^r C_0 [1 + \frac{r(r+1)}{(r-1)(r+4)} t^2 + \frac{r(r+2)(r+3)}{(r-1)(r+4)(r+6)} t^4 + \ldots \qquad (7)$$

بوضع $r = 3$ في (7) ، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الأول

$$y_1 = t^3 [1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4 + \ldots]$$

وبوضع $r = -2$ في (7) ، $C_0 = 1$ نحصل على الحل الثاني

$$y_2 = t^{-2} [1 - \frac{t^2}{3}]$$

ويكون الحل العام للمعادلة (5) هو

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= At^3 [1 + \frac{3.4}{2.7} t^2 + \frac{3.5.6}{2.7.9} t^4] + \frac{B}{t^2} [1 - \frac{t^2}{3}]$$

أى أن

$$y = \frac{A}{x^3} [1 + \frac{3.4}{2.7} \frac{1}{x^2} + \frac{3.5.6}{2.7.9} \frac{1}{x^4}] + Bx^2 (1 - \frac{1}{3x^2})$$

حيث B ، A ثابتان اختياريان

ملحوظة: قد تكون المعادلة التفاضلية في صورة معادلة أويلر ولذلك بعد التعويض
بالحل في شكل متسلسلة نجد أن قوى x في جميع الحدود متساوية والتي ينتج
عنها $C_n = 0 , n \ge 1$ و الطريقة تتضح في المثال الآتي:

(١١)

استخدم طريقة فروبنيوس لإيجاد الحل بالقرب من $x = 0$ للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

∴ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك؟).

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore \quad y' = \sum C_n (n+r) x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum C_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} - \sum C_n (n+r) x^{n+r} + \sum C_n x^{n+r} = 0$$

نلاحظ هنا أن قوى x متساوية. وبمساواة معامل أقل قوى للمتغير x بالصفر ، نجد
أن

$$C_n [(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1] = 0$$

$$C_n (n+r-1)^2 = 0 \qquad (1)$$

وبوضع $n = 0$ في (1) نحصل على المعادلة الدليلية

$$C_0 (r-1)^2 = 0 \quad , \quad C_0 \neq 0$$

$$\therefore r = 1 \ , \ 1$$

الجذران متساويان. وبوضع $r = 1$ في (1) نجد أن

$$C_n n^2 = 0$$

والتي تؤدي إلى ان $C_n = 0$ لكل $n \geq 1$ وبالتالي يكون الحل على صورة

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^r [C_0 + 0] = x^r \quad , \quad C_0 = 1$$

ويكون الحل الأول هو

$$y_1 = y(x, r)\Big|_{r=1} = x$$

ويكون الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial y(x, r)}{\partial r}\Bigg|_{r=1} = x^r \ln x \; r = 1 = x \ln x$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة

$$y = Ay_1 + By_2 = Ax + Bx \ln x$$

حيث B, A ثابتان اختياريان.

ملاحظات : يمكن استخدام العلاقة :

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{y_1^2} dx$$

في ايجاد الحل الثاني في هذه الحالة ولذلك ففي المثال السابق يكون

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-x}{-x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln x$$

حيث $a_2(x) = -x^2$ ، $a_1(x) = -x$ هما ما يلي المعادلة التفاضلية

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + y = 0$$

٢ - عند استخدام طريقة فروبنيوس فإنه في بعض الأحيان يتطلب أن توجد فترة التقارب للمتغير x التي تكون فيها المتسلسلة اللانهائية تقاربيه . ولا ختبار تقارب المتسلسلة $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$ نستخدم اختبار النسبة الذي ينص على أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ تكون تقاربية إذا كان $\lim_{n\to\infty} \left| u_{n+1} / u_n \right| < 1$

تمارين

أ) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية في صورة متسلسلة قوى لانهائية:

1) $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0;$

2) $2x(x+1)y'' + 3(x+1)y' - y = 0;$

3) $4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0;$

4) $x^2 y'' - x(x+1)y' + y = 0;$

5) $4x^2 y'' + (1-2x)y = 0;$

6) $xy'' + y' + xy = 0;$

7) $x^2 y'' + 2x(x-2)y' + 2(2-3x)y = 0;$

8) $xy'' + (x-1)y' - y = 0;$

9) $xy'' - (3+x)y' + 2y = 0;$

ب) أوجد حل كل من المعادلات التالية التي تحقق في حالة x كبيرة جداً في صورة متسلسلة لا نهائية:

a) $x^4 y'' + x(1+2x^2)y' + 5y = 0;$

b) $2x^2(x-1)y'' + x(5x-3) + (x+1)y = 0;$

c) $4x^3 y'' + 6xy' + y = 0;$

ج) أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية في صورة متسلسله لا نهائية .

1) $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$;

2) $2x^2y'' + 11xy' + 4y = 0$;

3) $x^2y'' - 6xy' = 0$;

4) $x^2y'' + 2y = 0$;

5) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

6) $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$.

7) $y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{16x^2}y$

8) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}y\right) = 0$

9) $x^2y'' - (x+2)y = 0$

10) $(x-1)^2y'' - (x^2 - x)y' + y = 0$ حول النقطة الشاذة المنتظمة $x_0 = 1$

11) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

12) $y'' - 2x^2y' + 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 1$

الباب الخامس

معادلة لجندر التفاضلية

Legendre Differential Equation

الباب الخامس

معادلة لجندر التفاضلية

Legendre Differential Equation

١ - المقدمة :

تسمى المعادلة على الصورة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية. والحل العام للمعادلة (1) يعطى بالعلاقة

$$y = C_1P_n(x) + C_2Q_n(x) \qquad \text{و} \qquad n = 0,1,2,3,...$$

حيث $P_n(x)$ كثيرات حدود تسمى كثيرات حدود لجندر من النوع الأول بينما $Q_n(x)$ تسمى دوال لجندر من النوع الثاني وهي غير محدودة عندما $x = \pm 1$ وهما حلان مستقلان للمعادلة (1)

ولحل المعادلة (1) في صورة متسلسلة، نجد أن :

$x = 0$ نقطة عادية لذلك نفترض أن الحل على الصورة

ويكون لدينا

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\therefore y' = \sum_{k=0} a_k k x^{k-1} \quad , \quad y'' = \sum_{k=0} a_k k(k-1)x^{k-2}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\sum_{k=0} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=0} 2a_k k x^k + \sum_{k=0} n(n+1)a_k x^k = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{k-2} بالصفر، نحصل على

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}(k-2)(k-3) - 2a_{k-2}(k-2) + n(n+1)a_{k-2} = 0$$

$$\therefore a_k k(k-1) - a_{k-2}[(k-2)(k-1) - n(n+1)] = 0$$

$$\therefore a_k k(k-1) = -a_{k-2}[n^2 + n - (k-2)(k-1)]$$

العلاقة التكرارية

$$a_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)} a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

ومن هذه العلاقة ، وباعتبار $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ إختياريتين يمكن حساب جميع المعاملات بدلالة كل من a_1, a_0 .

١) $a_0 \neq 0$ إختيارية

$$\therefore a_2 = \frac{-n(n+1)}{(2)(1)} a_0 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{(4)(3)} a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{(6)(5)} a_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!} a_0, \ldots$$

٢) $a_1 \neq 0$ إختيارية

$$a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{(3)(2)} a_1 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{(5)(4)} a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1$$

$$a_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{(7)(6)} a_5 = -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!} a_1, \ldots$$

على ذلك، يكون الحل العام على الصورة

$$y = a_0\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 -$$
$$\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \ldots\} +$$
$$a_1\{x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 -$$
$$\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \ldots\}$$
$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

من الواضح إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن إحدى المتسلسلتين $y_1(x), y_2(x)$ سوف تنتهي(أي تكون محدودة) بمعنى أن تكون كثيرة حدود من درجة n ويرمز لها بالرمز $P_n(x)$ بينما المتسلسلة الأخرى تكون لانهائية ويرمز لها بالرمز $Q_n(x)$.

فإذا كانت n عدداً زوجياً، فإن $y_1(x) = P_n(x)$ وتكون $P_n(x)$ دالة كثيرة حدود زوجية بينما $y_2(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية

أما إذا كانت n عدداً فردياً فإن $y_1(x) = Q_n(x)$ متسلسلة لانهائية بينما $y_2(x) = P_n(x)$ دالة كثيرة حدود فردية.

ويكون الحل العام

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

إذا كانت n عدداً صحيحاً.

وإذا اخترنا $a_0 = a_1 = 1$ بحيث يكون معامل x^n هو

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

فإن

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

حيث $M = \frac{n}{2}$ إذا كان n عدداً زوجيا

$M = \frac{n-1}{2}$ إذا كان n عدداً فرديا.

٢ - صيغة رودريج: **Rodrigue**

يمكن التعبير عن كثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ بالصيغة التالية وتسمى صيغة رودريج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

الإثبات:

نفرض أن $z = (x^2-1)^n$

$$\therefore z' = n(x^2-1)^{n-1}(2x) \Rightarrow (x^2-1)z' = 2nxz \qquad (1)$$

بتطبيق صيغة ليبنز وهي

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + nf^{(n-1)}.g' + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}.g'' + \ldots + f.g^{(n)}.$$

بتفاضل طرفي (1) $(n+1)$ مرة نحصل على

$$(x^2-1)z^{(n+2)} + (n+1)(2x)z^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2!} 2z^{(n)} = 2n[xz^{(n+1)} + (n+1)z^{(n)}]$$

$$\therefore (x^2-1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n+1)z^{(n)} = 0$$

وبافتراض أن

$$y = \frac{d^n z}{dx^n} = z^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

اى ان y تحقق معادلة لجندر التفاضلية ، كما أن ky تكون حلاً أيضاً للمعادلة (1).

الآن نحاول إيجاد k.

$$k\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = P_n(x) = \sum_{m=0}^{M}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

بمساواة معاملى x^n فى الطرفين نجد أن

$$k\,2n(2n-1)(2n-2)\dots(2n-n+1)\frac{n!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2^n n!}$$

وبالتالى فإن

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

٢ - الصور المختلفة لكثيرة حدود لجندر

بوضع $n = 0$ فى صيغة رودريج نحصل على

$$1)\ P_0(x) = 1$$

بوضع $n = 1$ نجد أن

$$2)\ P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{1}{2}(2x) = x$$

بوضع $n = 2$

$$3)\ P_2(x)=\frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[4x^3-4x]=\frac{4}{8}(3x^2-1)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

بوضع $n=3$

$$4)\ P_3(x)=\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{x^3}(x^2-1)^3=\frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}[6x^5-12x^3+6x]$$

$$=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}[5x^4-6x^2+1]=\frac{1}{8}(20x^3-12x)$$

$$\therefore P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

ويمكن إثبات أن

$$5)\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$6)\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

نلاحظ أن الدوال $P_0(x),P_2(x),P_4(x),...$ زوجية ، بينما الدوال $P_1(x),P_3(x),P_5(x),...$ فردية.

4 - الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ Generating Function for $P_n(x)$

تكون الدالة المولدة كثيرة حدود لجندر على الصورة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

الاثبات:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=[1-2xh+h^2]^{-1/2}=1+\frac{1}{2}h(2x-h)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}h^2(2x-h)^2+...$$

$$=1+xh+\frac{1}{2}(3x^2-1)h^2+...$$

$$=P_0(x)+P_1(x)h+P_2(x)h^2+...$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

٥ - الخواص الأساسية لكثيرات الحدود $P_n(x)$

1) $P_n(1)=1$

الإثبات: -

نفرض $x=1$ في الدالة المولدة

$$\therefore (1-2h+h^2)^{-1/2}=\sum P_n(1)h^n$$

$$\therefore (1-h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)h^n$$

لكن

$$\frac{1}{1-h}=(1-h)^{-1}=1+h+h^2+h^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)h^n=\sum_{n=0}^{\infty}h^n$$ أي أن $P_n(1)=1$

2) $P_n(-1)=(-1)^n$

الإثبات:

نضع $x=-1$ في الدالة المولدة

$$\therefore (1+2h+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

$$\therefore (1+h)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

لكن

$$(1+h)^{-1}=\frac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+\ldots+(-1)^n h^n+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-1)h^n$$

$$\therefore P_n(-1)=(-1)^n$$

وبالمثل نستطيع اثبات أن

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

وذلك بوضع $-x$ بدلاً من x فى الدالة المولدة

$$3)\ P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \ \text{odd} \quad (\text{فردية}) \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & n = 2m \ \text{even} \quad (\text{زوجية}) \end{cases}$$

الاثبات:

بوضع $x = 0$ فى الدالة المولدة فنحصل على

$$\therefore (1+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)h^n = 1 + (\frac{-1}{2})h^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}h^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}h^6 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}h^2 + (-1)^2 \frac{1.3}{2^2 2!}h^4 + (-1)^3 \frac{1.3.5}{2^3 3!}h^6 + \dots$$

من الواضح إذا كانت n فردية فإن $P_n(0) = 0$ ، أما إذا كانت $n = 2m$ زوجية فإن

$$P_n(0) = P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2^m m!} = (-1)^m \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{2^m m!} \cdot \frac{2.4\dots2m}{2.4\dots2m}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$\therefore P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \ \text{odd} \quad (\text{فردية}) \\ \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2} & n = 2m \ \text{even} \quad (\text{زوجية}) \end{cases}$$

نظرية (١) : -

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx$$

البرهان : -

من صيغة رودريج و بالتكامل بالتجزيء n من المرات .

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n f'(x)dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n f^{(n)}(x)dx$$

نتيجة : -

1) $\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$

2) $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$

وتسمى خاصية التعامد **(orthogonality)**

قبل إثبات هذه النتيجة سنحتاج إلى هذه التمهيدية

تمهيدية :

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

البرهان : -

حيث إن

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, d\theta$$

وعليه فإن

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta(\ell,s) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\ell-1}\theta \sin^{2s-1}\theta\, d\theta$$

$$2\ell = 2(n+1) \Rightarrow \ell = n+1 \;,\; 2s-1=0 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\beta(n+1,1/2) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{n!\Gamma(1/2)}{2(n+1/2)(n-1/2)\dots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

برهان النتيجة (١)

من النظرية السابقة، بوضع

$$f(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$\therefore f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n(n!)}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

حيث إن الدالة المكاملة زوجية

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$

نفترض أن

$$x = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \cos\theta d\theta$$

$$x : 0 \to 1$$

$$\theta : 0 \to \pi/2$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2n+1}\theta d\theta$$

$$= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n}\ (n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

برهان النتيجة (٢)

باعتبار $m < n$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^n}{dx^n}P_m(x)dx = 0$$

باعتبار $n < m$ كما في النتيجة (١) فإن

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)dx = 0$$

مثال (١)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1}x^4 P_2(x)dx$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_2(x)dx = \frac{(-1)^2}{2^2 2!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2 \frac{d^2}{dx^2}x^4 dx = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} 12x^2(x^2-1)^2 dx$$

$$= 3\int_{0}^{1}(x^6 - 2x^4 + x^2)dx = 3[\frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3]_0^1$$

$$= 3[\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}] = \frac{87}{105} = \frac{29}{35}$$

مثال (٢)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_3(x)dx$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} x^4 P_3(x)dx = 0$$

لماذا... ؟ لأن $P_3(x)$ دالة فردية

٢ – العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر Recurrence Relations Formulae

$$1)\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

$$2)\ P_n(x) + 2xP_n'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x)$$

$$3)\ P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$$

$$4)\ xP_n'(x) = P_{n-1}'(x) + nP_n(x)$$

الإثبات: –

العلاقة الأولى:

حيث إن الدالة المولدة

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n$$

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى h، فنحصل على

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2x+2h)=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\therefore (x-h)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n=(1-2hx+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)h^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2xnP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n+1}$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين فنحصل على

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-2nP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

$$\therefore (n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

$$\therefore P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

العلاقة الثانية:

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى x.

$$-\frac{1}{2}(1-2xh+h^2)^{-3/2}(-2h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)h^n$$

$$\therefore h\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n=(1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)h^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)h^n-\sum_{n=0}^{\infty}2xP_n'(x)h^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)h^{n+2}$$

بمساواة معامل h^{n+1} في الطرفين نحصل على

$$\therefore P_n(x)=P_{n+1}'(x)-2xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)$$

$$\therefore P_n(x)+2xP_n'(x)=P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)$$

العلاقة الثالثة :

بتفاضل طرفي العلاقة (1) بالنسبة ل x فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}'(x)=\frac{2n+1}{n+1}[xP_n'(x)+P_n'(x)]-\frac{n}{n+1}P_{n-1}'(x)$$

من العلاقة الثانية والتعويض عن

$$xP_n'(x)=\frac{1}{2}[P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)-P_n(x)]$$

فنحصل على

$$\therefore P_{n+1}'(x)=\frac{2n+1}{n+1}[\frac{1}{2}(P_{n+1}'(x)+P_{n-1}'(x)-P_n(x))+P_n(x)]-\frac{n}{n+1}P_{n-1}'(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x)=\frac{2n+1}{2(n+1)}P_{n+1}'(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_{n-1}'(x)+\frac{2n+1}{2(n+1)}P_n'(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}'(x)$$

وبالتالي فإن

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)}P_{n+1}'(x) = \frac{1}{2(n+1)}P_{n-1}'(x) + \frac{2n+1}{2(n+1)}P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x) = P_{n-1}'(x) + (2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$$

العلاقة الرابعة

بجمع $(3),(2)$ نحصل على

$$\therefore P_n(x) + 2xP_n'(x) + P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = P_{n+1}'(x) + P_{n-1}'(x) + (2n+1)P_n(x)$$

$$\therefore 2xP_n'(x) = 2P_{n-1}'(x) + 2nP_n(x)$$

$$\therefore xP_n'(x) = P_{n-1}'(x) + nP_n(x)$$

٧ - أمثلة :

مثال(١)

باستخدام العلاقات التكرارية ،أوجد $P_2(x), P_3(x)$ ، مع العلم ان

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

الحل

من العلاقة (١) نرى أن

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}$$

نضع $n = 1$ فنحصل على

$$\therefore P_2 = \frac{3}{2}xP_1 - \frac{1}{2}P_0 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

نضع $n = 2$ فنحصل على

$$P_3 = \frac{5}{3}xP_2 - \frac{2}{3}P_1 = \frac{5}{3}x\frac{1}{2}(3x^2 - 1) - \frac{2}{3}x$$

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x$$

$$= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

مثال (٢)

باستخدام العلاقات التكرارية لدالة لجندر أثبت أن: -

$$P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1$$

الحل

من (3) نرى أن

$$P_{n+1}'(x) = (2n+1)P_n(x) + P_{n-1}'(x)$$

نضع $n = 5$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + P_4'$$

نضع $n = 3$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + P_2'$$

نضع $n = 1$ نحصل على

$$\therefore P_6' = 11P_5 + 7P_3 + 3P_1 + P_0'$$

ولكن ، حيث

$P_0 = 1$ فإن $P_0' = 0$

ملحوظة: -

يمكن إثبات أن: -

في حالة n زوجي $P_n'(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \dots + 3P_1$

اما في حالة n فردي

$$P_n^{\,1}(x) = (2n-1)P_{n-1}(x) + (2n-5)P_{n-3} + \dots + 5P_2 + 1$$

مثال(٣)

أوجد قيمة

$$\int_0^1 P_n(x)dx$$

الحل

من العلاقة

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}^{\,1}(x) - P_{n-1}^{\,1}(x)$$

ليكون

$$\therefore \int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right)_0^1$$

وحيث نعلم ان $P_n(1) = 1$ فإن

$$\therefore \int_0^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)\right]$$

من الواضح إذا كانت n عدداً زوجياً فإن $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$ لكن إذا كانت عدداً فردياً فإن

$$\int_0^1 P_n(x)dx \neq 0$$

مثال(٤)

إثبت ان

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

الحل

من العلاقة

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

نجد أن

$$\therefore xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

بالتعويض في الدالة المتكاملة

$$I = \int_{-1}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + \frac{n}{2n+1}P^2{}_{n-1}(x)\right]dx$$

ومن خاصية التعامد نرى أن

$$I = \frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)dx = \frac{n}{(2n+1)}\frac{2}{\left[2(n-1)+1\right]} = \frac{2n}{4n^2-1}$$

مثال (٥)

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)dx$$

الحل

نعلم أن

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1)$$

أي أن

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\therefore I = \int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)\right]P_n(x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}P_2(x)P_n(x)dx + \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}P_0(x)P_n(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 2, n \neq 0 \\ \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3} & , n = 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15} & n = 2 \end{cases}$$

مثال (٦)

عبر عن الدالة $F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ بدلالة كثيرات حدود لجندر

الحل

نعلم أن

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x)$$

وعلى ذلك فإن :

$$x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x)$$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 3P_1(x) + P_0(x)$$

$$= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{18}{5}P_1(x) + \frac{5}{3}P_0(x)$$

نظرية (٢) : - إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من درجة n فإن

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x)$$

حيث

$$c_r=(r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_r(x)dx$$

مثال (٧)

فك $f(x)=x^2$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_r p_r(x)$

الحل

حيث ان $f(x)=x^2$ كثيرة حدود من درجة 2 ومن متسلسلة ليجندر

$$x^2=\sum_{r=0}^{2} c_r p_r(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+c_2p_2(x) \qquad (1)$$

حيث

$$c_r=(r+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} x^2 p_r(x)dx \qquad (2)$$

ولكن

$$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad (3)$$

بوضع $r=0,1,2$ فى (2) وباستخدام (3) فيكون لدينا

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx=\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3})\Big]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx=0$$

$$c_2=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2-1)dx=\frac{5}{4}\left[3.\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

بالتعويض فى (1) نحصل على

$$x^2 = \frac{1}{2} p_0(x) + \frac{2}{3} p_2(x)$$

مثال (٨)

فك $x^4 - 3x^2 + x$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_r p_r(x)$

الحل

كما فى المثال السابق نحصل على

$$x^4 - 3x^2 + x = \frac{-4}{5} p_0(x) + p_1(x) - \frac{10}{7} p_2(x) + \frac{8}{35} p_4(x).$$

مثال (٩)

فك $f(x)$ فى الصورة $\sum_{r=0}^{\infty} c_r p_r(x)$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < 1 \end{cases} \qquad (1)$$

الحل

نفترض أن

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r P_r(x) \qquad (2)$$

حيث

$$c_r = (r + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(x) P_r(x) dx$$

$$= \frac{2r+1}{2} \left[\int_{-1}^{0} f(x) P_r(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) P_r(x) dx \right]$$

$$= \frac{2r+1}{2} \int_{0}^{1} P_r(x) dx \qquad (3)$$

بوضع $r=0,1,2,\ldots$ في (3) نحصل على

$$c_0=\frac{1}{2}\int_0^1 p_0(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1.dx=\frac{1}{2}$$

$$c_1=\frac{3}{2}\int_0^1 p_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_0^1 xdx=\frac{3}{4}$$

$$c_2=\frac{5}{2}\int_0^1 p_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3x^2-1}{2}dx=0$$

$$c_3=\frac{7}{2}\int_0^1 p_3(x)dx=\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{5x^3-3x}{2}dx=-\frac{7}{16}$$

وهكذا وبتعويض هذه القيم في (2) نحصل على

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)-\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\ldots$$

تمارين

١) إذا كان $-1 < x < 1$ و $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)$

فاثبت أن

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x) f(x) dx$$

٢) أوجد مفكوك

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 < x \le 1 \\ 0 & -1 \le x < 0 \end{cases}$$

فى متسلسلة على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

وأكتب الحدود الأربعة الأولى غير الصفرية فى هذا المفكوك

٣) اثبت إن

$$(i) \int_{-1}^{1} x P_n'(x) = 0 \qquad (ii) \int_{-1}^{1} x^2 P_4(x) dx = 0$$

$$(iii) \int_{-1}^{1} x P_n(x) dx = \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

٤) اثبت إن

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(n+1)}{2^n \Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

٥) برهن خاصية التعامد

$$= \int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx \begin{cases} 0 & m = n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m \neq n \end{cases}$$

وذلك باستخدام ان كل من $P_m(x)$, $P_n(x)$ حل لمعادلة لجندر التفاضلية .

الباب السادس

معادلة بسل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

الباب السادس

معادلة بسل التفاضلية

Bessel's Differential Equations

١ - مقدمة

تكون معادلة بسل التفاضلية التفاضلية على الصورة

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

حيث n مقدار ثابت.

ولإيجاد حل المعادلة فى صورة متسلسلة لانهائية حيث $x = 0$ نقطة شاذة وأن

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2} = 1 \;,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(x^2 - n^2)}{x^2}\,x^2 = -n^2$$

$\therefore$ $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة لذلك نستخدم طريقة فروبنيوس .

نفترض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاه نحصل على

$$\sum a_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r} + \sum a_k (k+r)x^{k+r} + \sum a_k x^{k+r+2} - \sum a_k n^2 x^{k+r} = 0$$

بمساواة معامل x^{k+r} بالصفر فنجد أن

$$\therefore a_k(k+r)(k+r-1) + a_k(k+r) + a_{k-2} - n^2 a_k = 0$$

$$a_k[(k+r)^2 - n^2] = -a_{k-2} \qquad (1)$$

بوضع $k = 0$ فى (1) فإن المعادلة الدليلية فنحصل على

$$r^2 - n^2 = 0 \;,\quad a_{-2} = 0,\; a_0 \neq 0 \;;$$

$$\therefore r = n \;,\; -n \,.$$

أي أن الجذرين حقيقيان و الفرق بينهما $2n$.

حيث أن الفرق بين الجذرين عدداً كسرياً او عدداً صحيحاً موجباً. ويساوي $2n$

من (1) نرى ان

$$a_k = \frac{-1}{(k+r)^2 - n^2} a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

من هذه العلاقة نحصل على

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1}{(r+2)^2 - n^2} a_0$$

$$a_4 = \frac{-1}{(r+4)^2 - n^2} a_2 = \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} a_0 \quad , \quad \dots$$

ويكون الحل هو

$$\therefore y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$$

فنحصل على

$$= a_0 x^r [1 - \frac{1}{(r+2)^2 - n^2} x^2 + \frac{(-1)^2}{[(r+4)^2 - n^2][(r+2)^2 - n^2]} x^4 + \dots]$$

بوضع $r = n$

أي ان

$$\therefore y = a_0 x^n [1 - \frac{1}{2^2 (n+1)} x^2 + \frac{(-1)^2}{2^4 (n+2)(n+1)2!} x^4 + \dots +$$

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k} (n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)k!} x^{2k} + \dots]$$

$$= a_0 x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)k!} (\frac{x}{2})^{2k}$$

باختيار

$$a_0 = \frac{1}{2^n\,\Gamma(n+1)}$$

ويكون الحل على الصورة $J_n(x)$ ، حيث

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1).\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

وتسمى دالة بسل من النوع الأول،

وإذا وضعنا $r=-n$ نحصل على الحل

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

ويكون الحل العام

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

حيث n عدد غير صحيح ، A, B ثابتان اختياريان

مثال (١)

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل

نعلم من التعريف أن

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1).\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$$

بوضع $-n+k=r$ أي $k=n+r$ فنحصل على

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(r+1).(n+r)!}(\frac{x}{2})^{-n+2n+2r}$$

$$= \sum_{r=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r}}{\Gamma(n+r+1).\Gamma(r+1)}(\frac{x}{2})^{n+2r}$$

$$\Gamma(-n+1) = \infty \ , \ -n+1 \le 0 \Rightarrow \Gamma(r+1) = \infty \ , \ -n \le r \le -1$$

$$\therefore J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1).r!}(\frac{x}{2})^{n+2r} = (-1)^n J_n(x).$$

مثال (٢)

إذا علم أن

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

فاثبت أن

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin(x) \qquad , \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos(x)$$

الحل

حيث أن

$$J_n(x) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{n+2k}$$

فإن

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum \frac{(-1)^k}{k!(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^{2k+1} \quad , \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)(2k-1)\dots 3.1} (\frac{x}{2})^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{k+1} (2k)(2k-2)\dots 4.2}{k!(2k+1)!} (\frac{x}{2})^{2k+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k+1} k!}{k!(2k+1)!} (\frac{x}{2})^{2k+1}$$

$$\therefore \ J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).$$

وبالمثل $-\frac{1}{2} + 2k$

$$J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\frac{-1}{2}+k+1)} (\frac{x}{2})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum \frac{(-1)^k}{k!(k-1/2)(k-3/2)\dots 3/2.1/2.\Gamma(1/2)} (\frac{x}{2})^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^2}{k!(2k-1)(2k-3)\dots 3.1} (\frac{x}{2})^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^k (2k)(2k-2)\dots 4.2}{k!(2k)!} (\frac{x}{2})^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum \frac{(-1)^k 2^{2k} k!}{k!(2k)!} (\frac{x}{2})^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$$

مثال (٢)

اثبت ان

$$J_{\frac{1}{2}}^2(x)+J_{\frac{-1}{2}}^2(x)=\frac{2}{\pi x}$$

الحل

باستخدام المثال السابق نجد أن

$$J_{\frac{1}{2}}^2(x)+J_{\frac{-1}{2}}^2(x)=\frac{2}{\pi x}\sin^2(x)+\frac{2}{\pi x}\cos^2(x)=\frac{2}{\pi x}(\sin^2(x)+\cos^2(x))=\frac{2}{\pi x}.$$

٢ - الدالة المولدة لدوال بسل $J_n(x)$ Generating Function for

تسمى الدالة

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$$

بالدالة المولدة لدوال بسل، حيث n عدد صحيح، ونستطيع استنتاج بعض العلاقات التكرارية لدوال بسل كما يلي :

٣ - العلاقات التكرارية لدوال بسل $J_n(x)$ Recurrence Relations for

1) $J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x)$

2) $J_n'(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$

3) $\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(n)$

4) $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$

الإثبات:

١) بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى t

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)t^{n-1}$$

بمساواة معامل t^{n-1} في الطرفين نحصل على

$$\therefore \frac{x}{2}J_{n-1}(x)+\frac{x}{2}J_{n+1}(x)=nJ_n(x)$$

$$\therefore J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x) \qquad \text{i}$$

٢) بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة إلى x فنجد أن

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum J_n'(x)t^n$$

$$\therefore \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})\sum J_n(x)t^n=\sum J_n'(x)t^n$$

بمساواة معامل t^n في الطرفين فنحصل على

$$J_n'(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)] \qquad \text{ii}$$

٣) من العلاقة (ii) ، فإن

$$J_{n+1}(x)=J_{n-1}(x)-2J_n'(x) \qquad \text{(I)}$$

بطرح (I) من العلاقة (i) نجد أن فنحصل على

$$\therefore 0=\frac{2n}{x}J_n(x)-2J_{n-1}(x)+2J_n'(x)$$

$$\therefore nJ_n(x)+xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x)$$

بضرب طرفي المعادلة في x^{n-1} فنجد ان

$$\therefore nx^{n-1}J_n(x)+x^nJ_n'(x)=x^nJ_{n-1}(x)$$

أي ان

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x). \qquad \text{iii}$$

4) بجمع العلاقتين (I) و (i) فنحصل على

$$\therefore 2J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-2J'_n(x)$$

$$\therefore xJ_n'(x)-nJ_n(x)=-xJ_{n+1}(x)$$

بضرب طرفي المعادلة في x^{-n-1} فنحصل على

$$\therefore x^{-n}J_n'(x)-nx^{-n-1}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x).$$

<u>ملحوظة:</u> يمكن إثبات العلاقتين (iii) ، (iv) دون إستخدام العلاقتين (i) ، (ii).

حيث أن

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

فإن

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2k}x^{2n+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2n+2k)}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k-1}\left(\frac{x^n}{2}\right)$$

وحيث ان

ولكن $\Gamma(n+k+1)=(n+k)\Gamma(n+k)=(n+k)\Gamma(n-1+k+1)$

فإن

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n-1+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2k}$$

$$=x^nJ_{n-1}(x).$$

كذلك بالمثل نجد ان

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}(\frac{1}{2})^{n+2k}x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(n+k+1)}(\frac{1}{2})^{n+2k}x^{2k-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(n+k+1)}(\frac{x}{2})^{n-1+2k}$$

بوضع $k-1=r$ اي $k=r+1$ فنحصل على

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = x^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+1+r+1)}(\frac{x}{2})^{n+1+2r}$$

$$= -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

امثله :

مثال (١)

اثبت ان

$$1)\ J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x - x\cos x}{x})$$

$$2)\ J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{x\sin x + \cos x}{x})$$

الحل

من العلاقة (1)

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

بوضع $n = \frac{1}{2}$ فنحصل على

ولدينا من المثال (٢)

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

$$\because J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

فإن

$$\therefore J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

بوضع $n = -\frac{1}{2}$ في العلاقة (1) فنحصل على

$$J_{1/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{-3/2}(x).$$

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{x} \right)$$

مثال (٢)

اثبت أن

1) $\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C$

2) $\int x^{-n} J_{n+1}(x) dx = -x^{-n} J_n(x) + C$

<u>الأثبات:</u> من العلاقة (3)

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x) + C$$

كما أن من العلاقة (4)

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

بالتكامل

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx = -x^{-n} J_n(x) + C$$

مثال (٣)

أوجد قيمة

$$\int x^4 J_1(x)dx$$

الحل

$$\int x^4 J_1(x)dx = \int x^2 (x^2 J_1(x)dx)$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = x^2 \qquad dv = x^2 J_1(x)dx$$
$$du = 2x dx \qquad v = x^2 J_2(x).$$
$$\therefore I = x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)dx$$
$$= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C.$$

مثال (٤)

أثبت أن

$$(i)\ J_0' = -J_1 \qquad , \qquad (ii)\ J_2 - J_0 = 2J_0''$$

الإثبات

(i) من العلاقة التكرارية

$$xJ'_n = -nJ_n - xJ_{n+1}$$

بوضع $n = 0$ نحصل على

$$xJ_0' = -xJ_1 \quad \Rightarrow \quad J_0' = -J_1 \qquad (2)$$

(ii) من العلاقة التكرارية

$$2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}$$

بالتفاضل نحصل على

$$2J_n'' = J_{n-1}' - J_{n+1}' \qquad (3)$$

بوضع $n+1, n-1$ بدلاً من n نحصل على

$$2J_{n-1}' = J_{n-2} - J_n \qquad (4)$$

$$2J_{n+1}' = J_n - J_{n+2} \qquad (5)$$

بالتعويض من (4) ، (5) في (3) نحصل على

$$2J_n'' = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})$$

$$4J_n'' = J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2} \qquad (6)$$

بوضع $n = 0$ في (6) نحصل على

$$4J_0'' = J_{-2} - 2J_0 + J_2$$

$$= (-1)^2 J_2 - 2J_0 + J_2$$

$$4J_0'' = 2(J_2 - J_0) \quad \Rightarrow \quad 2J_0'' = J_2 - J_0$$

مثال(٥)

استخدم العلاقة التكرارية

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

في التعبير عن J_3 بدلالة J_0, J_1.

الحل

حيث أن

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

بوضع $n = 3$ نحصل على

$$J_4 = \frac{6}{x} J_3 - J_2$$

بوضع $n = 2$ نحصل على

$$J_3 = \frac{4}{x} J_2 - J_1$$

$$\therefore J_4 = \frac{6}{x}\left[\frac{4}{x} J_2 - J_1\right] - J_2$$

$$= \left(\frac{24}{x^2} - 1\right) J_2 - \frac{6}{x} J_1$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$

$$\therefore J_4 = \left(\frac{24}{x^2} - 1\right)\left(\frac{2}{x} J_1 - J_0\right) - \frac{6}{x} J_1$$

$$= \left(\frac{48}{x^2} - \frac{8}{x}\right) J_1 - \left(\frac{24}{x^2} - 1\right) J_0$$

مثال (٦)

باستخدام

$$(i)\ \frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}$$

$$(ii)\ \frac{d}{dx}(x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n+1}$$

اثبت أن

$$\frac{d}{dx}(J_n^2 + J_{n+1}^2) = 2(\frac{n}{x}J_n^2 - \frac{n+1}{x}J_{n+1}^2)$$

الحل

من (i) ; (ii) نحصل على

$$J_n' = \frac{-n}{x}J_n + J_{n-1} \qquad (1)$$

$$J_n' = \frac{n}{x}J_n - J_{n+1} \qquad (2)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n فى (1) نحصل على

$$J_{n+1}' = \frac{-(n+1)}{x}J_{n+1} + J_n \qquad (3)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[J_n^2 + J_{n+1}^2] = 2J_nJ_n' + 2J_{n+1}J_{n+1}'$$

$$= 2J_n[\frac{n}{x}J_n - J_{n+1}] + 2J_{n+1}[-\frac{n+1}{x}J_{n+1} + J_n]$$

$$= 2(\frac{n}{x}J_n^2 - \frac{n+1}{x}J_{n+1}^2)$$

مثال (٧)

باستخدام العمليات (ii) , (i) فى المثال السابق اثبت ان

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n-1}] = x[J_n^2 - J^2_{n+1}]$$

الحل

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}] = J_nJ_{n+1} + x(J_n'J_{n+1} + J_nJ_{n+1}')$$

$$= J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(xJ_n') + J_0(xJ_{n+1}') \qquad (1)$$

ومن العلاقتين (i) , (ii) نجد أن

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1} \tag{2}$$

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1} \tag{3}$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (3) نحصل على

$$xJ_{n+1}' = -(n+1)J_{n+1} + xJ_n \tag{4}$$

باستخدام xJ_n', xJ_{n+1}' من (2) ، (4) في (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}[xJ_nJ_{n+1}] = J_nJ_{n+1} + J_{n+1}(nJ_n - xJ_{n+1}) + J_n(-(n+1)J_{n+1} + xJ_n)$$

$$= x[J_n^2 - J_{n+1}^2].$$

مثال (٨)

إذا كان $n > -1$ اثبت أن

$$\int_0^x x^{n+1}J_n(x)dx = x^{n+1}J_{n+1}(x)$$

الحل

$$\frac{d}{dx}(x^nJ_n(x)) = x^nJ_{n-1}(x) \qquad (1)$$

حيث أن

بوضع $n+1$ بدلاً من n في (1) نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}J_{n+1}) = x^{n+1}J_n(x) \qquad (2)$$

بالتكامل من صفر إلى x نحصل على

$$\int x^{n+1} J_n(x)\,dx = x^{n+1} J_{n+1}(x)$$

مثال (٩)

أثبت أن

$$(i)\ \frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$$

$$(ii)\ \int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

الحل :

حيث أن

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$\frac{d}{dx}(xJ_1) = xJ_0$$

بوضع $ax = t$ أي $adx = dt$ فنجد أن

$$\int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} tJ_0(t)\,dt$$

وباستخدام الجزء (1) نحصل على

$$\int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab}\frac{d}{dt}(tJ_1)\,dt = \frac{1}{a^2}[tJ_1]_0^{ab} = \frac{1}{a^2}(abJ_1(ab) - 0)$$

$$\therefore \int_0^b xJ_0(ax)\,dx = \frac{b}{a}J_1(ab)$$

وحيث $J_1(0) = 0$

مثال (١٠)

أثبت أن

$$(i)\ \frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x)$$

$$(ii)\ \int_a^b J_0 J_1 dx = \frac{1}{2}[J_0^{\,2}(a) - J_0^{\,2}(b)]$$

الحل

الجزء (i) : حيث ان

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad (1)$$

بوضع $n = 0$

$$\frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x) \qquad (2)$$

الجزء (ii) باستخدام مثال (٧) نحصل على

$$\int_a^b J_0(x)J_1(x)dx = -\int_a^b J_0(x)J_0'(x)dx = [\frac{J_0^{\,2}(x)}{2}]_b^a = \frac{1}{2}[J_0^{\,2}(b) - J_0^{\,2}(a)]$$

مثال (١١) :

عبر عن $\int J_3(x)dx$ بدلالة $J_1(x), J_2(x)$.

الحل

باستخدام العلاقة

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}$$

بالتكامل نحصل على

$\int x^{-n}J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n}J_n(x)$ (1)

$\int J_3(x)\,dx = \int x^{2}(x^{-2}J_3(x))dx = x^{2}(-x^{-2}J_2(x)) - \int 2x(-x^{-2}J_2(x))dx$

بالتكامل بالتجزئ و باستخدام (1) ، $n = 2$ نحصل على

$$\int J_3(x)dx = -J_2(x) + \int x^{-1}J_2(x)dx = -J_2(x) + 2(-x^{-1}J_1(x)) + C$$

ومن العلاقة التكرارية

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \qquad (3)$$

بوضع $n = 1$ نحصل على

$$\frac{2}{x}J_1(x) = J_0(x) + J_2(x)$$

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x) \qquad (4)$$

باستخدام (4) فى (2) فنجد أن

$$\int J_3(x)dx = -\left(\frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x)\right) - 2\frac{J_1(x)}{x} + C$$
$$= J_0(x) - \frac{4J_1(x)}{x} + C$$

حيث C ثابت إختيارى

مثال (١٢) :

اثبت أن

$a)\ \cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \ldots$

$b)\ \sin(x\sin\theta) = 2J_1(x)\sin\theta + 2J_3(x)\sin 3\theta + 2J_5(x)\sin 5\theta + \ldots$

الحل

نفرض أن $t = e^{i\theta}$ وبالتعويض فى الدالة المولدة نحصل على

$$e^{\frac{1}{2}x(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(\cos n\theta+\sin n\theta)$$

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=\{J_0(x)+[J_{-1}(x)+J_1(x)]\cos\theta+[J_{-2}(x)+J_2(x)]\cos 2\theta+...\}$$
$$+i\{(J_1(x)-J_{-1}(x))\sin\theta+(J_2(x)-J_{-2}(x))\sin 2\theta+...\}$$

وحيث ان $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ فنحصل على

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=\{J_0(x)+2J_2(x)\cos 2\theta++...\}$$
$$+i(2J_1(x)\sin\theta+2J_3(x)\sin 3\theta+...)$$

وبمساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي ينتج المطلوب.

تمارين

١) أوجد قيمة كل من

$i)\ J_{3/2}(x) \qquad ii)\ J_{-5/2}(x)$

بدلالة دالتي الجيب وجيب التمام.

٢) أوجد قيمة $J_2(x)$ بدلالة $J_0(x), J_1(x)$.

٣) اثبت أن

$$i)\ J_n''(x) = \frac{1}{4}[J_{n-2}(x) - J_n(x) + J_{n+2}(x)]$$

$$ii)\ J_n'''(x) = \frac{1}{8}[J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)]$$

باستخدام العلاقات التكرارية، ثم عمم تلك النتائج

٤) أوجد قيمة كلاً من

$i)\ \int x^3 J_2(x)dx$,

$ii)\ \int_0^1 x^3 J_0(x)dx$,

$iii)\ \int x^2 J_0(x)dx$.

٥) اثبت ان

$i)\ J_0'(x) = -J_1(x)$,

$ii)\ \frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$.

٦) باستخدام العلاقة

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

اثبت ان

$$i)\ 1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots$$

$$ii)\ J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \dots = \sin x$$

٧) اثبت أن

$$x = 2J_0J_1 + 6J_1J_2 + \dots + 2(2n+1)J_nJ_{n+1} + \dots\dots$$

[تنويه : استخدام المثال (١٠)]

٨) اثبت أن

$$(i)\ J_0' = J_1 \qquad (ii)\ J_2 - J_0 = 2J_0''$$

$$(iii)\ J_2 = J_0' - \left(\frac{1}{x}\right)J_0 \qquad (iv)\ J_3 + 3J_0' + 4J_0''' = 0$$

٩) عبر عن $J_4(x)$ بدلالة J_0 ، J_1

١٠) اثبت ان

$$\int_0^x t\,J_n^2(t)\,dt = \frac{1}{2}x^2\left[J_n^2(x) - J_{n-1}(x)\,J_{n+1}(x)\right]$$

مستخدماً العلاقات التكرارية

الباب السابع

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

الباب السابع
المعادلات التفاضلية الجزئية
Partial Differential Equations

١ – مقدمة :

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تفاضلية تحوي مشتقه جزئيه أو أكثر وهي بذلك تتضمن على متغير تابع واحد وأكثر من متغير مستقل ومشتقات المتغير التابع بالنسبة للمتغيرات المستقلة أي إنها على الصورة

$$f(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{yy}, \ldots) = 0$$

حيث z هنا المتغير التابع ، x, y متغيران مستقلان ، ونلاحظ هنا أن

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ونود ان نلفت الانتباه اننا سوف نستخدم الرموز الآتية في دراستنا

$$z_x = p, z_y = q, z_{xx} = r, z_{xy} = s, z_{yy} = t.$$

ومن أمثلة المعادلات التفاضلية الجزئية:

$$z_{xy} + 2z_x + 3z_y + 5z = 2x + \cos(x - y)$$

$$z_x + 3z_y = 5z + \tan(3x - 2y)$$

$$z_{xx} + z_{yy} = x^2 y^2$$

٢ - أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية

يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية إلى تصنيفات مختلفة ، وهذا التصنيف له مفهوم هام لأن النظرية العامة وطرق الحل تطبق فقط على شكل معادلة مصنفة والتصنيفات الأساسية هي :

١) رتبة المعادلة التفاضلية (Order) :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة

امثلة

$z_t = z_{xx}$ من الرتبة الثانية

$z_t = z_x$ من الرتبة :الاولى

$z_t = z_{xxx} + \sin x$ من الرتبة الثالثة

٢) عدد المتغيرات :

هو عدد المتغيرات المستقلة فمثلا

$z_t = z_{xx}$ متغيران هما x, t

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r} u_{\theta\theta}$ المتغيرات هي r, t, θ

٣) الخطية :

قد تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية أو غير خطية، ففي المعادلات التفاضلية الخطية يكون المتغير التابع u (مثلا) وكل مشتقاته الجزئية تظهر في الصورة الخطية (اي إنها غير مضروبة في بعضها أو مرفوعة لأس خلاف الواحد الصحيح).

وبإيجاز فإن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية في متغيرين لها الصورة الآتية:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F, G إما أن تكون ثوابت أو دوال متصلة في المتغيرين x, y

فمثلا

$u_t = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ خطية

$uu_{xx} + u_t = 0$ غير خطية

$uu_x + yu_y + u^2 = 0$ غير خطية

$u_{xx} + yu_{yy} = 0$ خطية

٤) التجانس:

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة إذا كانت $G(x, y) = 0$، وتسمى غير متجانسة إذا كانت $G(x, y) \neq 0$.

٥) أنواع المعاملات:

إذا كانت المعاملات A, B, C, D, E, F, G في المعادلة (1) ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية ذات معاملات ثابتة وأما إذا كان واحد من المعاملات أو أكثر دالة في x أو y أو كلاهما فإنها تكون ذات معاملات متغيرة.

٦) الأنواع الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية:

المعادلات التفاضلية الخطية التي على الصورة (1) لها ثلاثة أنواع:

أولا: النوع المكافئ Parabolic إذا كانت

$$B^2-4AC=0$$

ثانياً : النوع الزائدي Hyperbolic إذا كانت

$$B^2-4AC>0$$

ثالثاً : النوع الناقصي Elliptic إذا كانت

$$B^2-4AC<0$$

ومن أمثلة ذلك

(i) $u_t=u_{xx}$

نجد أن $C=0, A=1, B=0$

$$\therefore B^2-4AC=0$$

أي أنها Parabolic

(ii) $u_{tt}=u_{xx}$

نجد أن $B=0, A=-C=1$

$$\therefore B^2-4AC=4>0$$

أي أنها Hyperbolic

(iii) $u_{xy}=0$

نجد أن $B=1, \; A=C=0$

$$\therefore B^2-4AC=1>0$$

أي أنها Hyperbolic

(iv) $\alpha u_{xx}+u_{yy}=0$

نجد أن $C=1, \; A=\alpha, \; B=0$

$$\therefore B^2-4AC=-4\alpha$$

فتكون من النوع الناقصي إذا كان $\alpha > 0$ ومن النوع المكافئ إذا كان $\alpha = 0$ ومن النوع الزائدي إذا كان $\alpha > 0$

ويجب ملاحظة انه في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات المتغيرة فإن نوع المعادلة قد يتغير من نقطة إلى أخرى.

تمرين:

اكتب التصنيف الكامل للمعادلات التفاضلية الجزئية الآتية:

$(i)\ u_t = u_{xx} + 2u_x + u$

$(ii)\ u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$

$(iii)\ u_t = u_{xx} + e^{-t}$

$(iv)\ u_{tt} = u u_{xxx} + e^{-t}$

الآن: ماذا نعني بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) ؟

نعني بحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية (1) هو دالة حقيقية g حيث $z = g(x, y)$ معرفة على المجموعة S للمناطق في المستوى xy وتحقق المعادلة (1).

مثال (١)

إثبت ان $u = x^2 - y^2$ حل للمعادلة $u_{xx} + u_{yy} = 0$

الحل

$u_x = 2x \quad , \quad u_{xx} = 2 \quad , \quad u_y = -2y \quad , \quad u_{yy} = -2$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

ونطاق u هو كل المستوى xy.

تمرين: إثبت ان $u=\ln(x^2+y^2)$ حل للمعادلة $u_{xx}+u_{yy}=0$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية

$$z_x = 2xy$$

حيث $z=f(x,y)$.

الحل

نتكامل بالنسبة إلى x (بإعتبار y ثابت) فنحصل على الحل

$z=x^2y+\phi(y)$ وهو حل المعادلة المعطاه

حيث $\phi(y)$ دالة اختيارية في y (الدالة الاختيارية $\phi(y)$ هنا بدلا من ثابت التكامل لأن $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=0$).

ملاحظة: حلول المعادلات التفاضلية الجزئية تحتوي على دوال إختيارية بينما حلول المعادلات التفاضلية العادية تحتوي على ثوابت اختيارية .

تمرين:

حل المعادلة $z_{yy}=0$ حيث $z=f(x,y)$.

نظرية: اذا كان $u_1=u_1(x,y)$ ، $u_2=u_2(x,y)$ حلين لمعادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة في المنطقة R من المستوى xy فإن ى تركيبة خطية على الصورة $u(x,y)=c_1u_1+c_2u_2$ هي حل أيضا لتلك المعادلة حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان .

٢ - تكوين المعادلة التفاضلية الجزئية

تتكون المعادلة التفاضلية الجزئية إما

(١) بحذف الثوابت الإختيارية أو

(٢) بحذف الدوال الإختيارية

أولا : حذف الثوابت الإختيارية

مثال (٣)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax + (1-a)y + b$$

الحل

$$z_x = a = p \quad , \quad z_y = 1 - a = q$$

$$\therefore p + q = 1$$

أي أن

$$z_x + z_y = 1$$

مثال (٤)

إحذف الثوابت الإختيارية من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2 \quad , \quad ab > 0$$

الحل

$$z_x = 2ax \quad , \quad z_y = 2by$$

$$\therefore z = \frac{z_x}{2x}x^2 + \frac{z_y}{2y}y^2$$

أي أن

$$xz_x + yz_y = 2z$$

مثال (٥)

إحذف الثوابت a, b من المعادلة

$$z = ax^2 + by^2 + ab$$

الحل

$$z_x = 2ax \;\rightarrow\; a = \frac{p}{2x}$$

$$z_y = 2by \;\rightarrow\; b = \frac{q}{2y}$$

$$\therefore z = \frac{p}{2x}x^2 + \frac{q}{2y}y^2 + \frac{pq}{4xy}$$

$$\therefore 2yx^2p + 2xy^2q = 4xyz$$

أي ان

$$yx^2p + xy^2q = 2xyz$$

مثال (٦)

حذف a من المعادلة

$$z = a(x+y)$$

الحل

$$z_x = a = p \;\rightarrow\; z = p(x+y)$$

او

$$z_y = a = q \;\rightarrow\; z = q(x+y).$$

ملاحظة : إذا كان عدد الثوابت الاختيارية المطلوب حذفها يزيد عن عدد المتغيرات المستقلة فإن رتبة المعادلة (او المعادلات) التفاضلية الجزئية الناتجة أعلى من الرتبة الأولى كما يتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٧)

احذف الثوابت c, b, a من المعادلة

$$z = ax + by + cxy$$

الحل

$$z_x = p = a + cy\ , \quad z_y = q = b + cx$$

ولكن هاتين المعادلتين بالإضافة إلى المعادلة المفروضة غير كافية لحذف الثوابت وبذلك نشتق p بالنسبة إلى x ، فنحصل على معادلة من الرتبة الثانية

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ويمكن إشتقاق q بالنسبة إلى y لنحصل على

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

أيضاً يمكن إشتقاق p بالنسبة إلى y او q بالنسبة إلى x لنحصل على

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = c$$

وعليه يكون

$$b = q - xs \ , \ a = p - ys$$

وبالتعويض عن a, b, c في المعادلة المفروضة نجد أن

$$z = (p - sy)x + (q - sx)y + xys$$

$$= xp + yq - xys$$

وعليه يكون قد حصلنا على ثلاث معادلات تفاضلية جزئية وهي

$$r = 0 \ , \ t = 0 \ , \ z = xp + yq - xys$$

وهي معادلات من الرتبة الثانية .

مثال (٨)

احذف b, a من المعادلة

$$z = (x^2 + a)(y^2 + b)$$

الحل

$$z_x = p = 2x(y^2 + b) \ , \ z_y = q = 2y(x^2 + a)$$

اي ان

$$y^2 + b = p/2x \ , \ (x^2 + a) = q/2y$$

$$\therefore z = \frac{pq}{4xy} \quad i.e: pq = 4xyz$$

مثال (٩)

أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة كرات نصف قطرها 5 وحدة طول ومركزها في المستوى $x = y$.

الحل

معادلة مجموعة الكرات

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-b)^2=25$$

حيث a,b ثوابت إختيارية بالإشتقاق جزئيا بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نجد أن

$$x-a+(z-b)p=0 \quad \rightarrow \quad x-a=mp$$

$$y-a+(z-b)q=0 \quad \rightarrow \quad y-a=mq$$

حيث $-m=z-b$

بالتعويض نجد ان

$$m^2(p^2+q^2+1)=25$$

ولكن

$$x-y=m(p-q)$$

وبالتعويض عن m نجد أن

$$(x-y)^2(p^2+q^2+1)=25(p-q)^2$$

مثال (١٠)

برهن أن المعادلة التفاضلية الجزئية الناتجة من حذف الثوابت a,b من المعادلة

$$z=ax+by+f(a,b)$$

هي معادلة كليرو الموسعة.

الحل

$$p=z_x=a \ , \ q=z_y=b$$

وعليه يكون

$$z=px+qy+f(p,q)$$

وهي معادلة كليرو الموسعة.

ثانيا: حذف الدوال الاختيارية

مثال (١١)

إحذف الدالة الإختيارية في المعادلة

$$z = f(x-y)$$

الحل

نضع $u = x - y$ ، أي أن $z = f(u)$ فإن

$$\therefore z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du} = p$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df}{du} = q$$

$$\therefore p + q = 0$$

أو $z_x + z_y = 0$

مثال (١٢)

إذا كانت معادلة أي مخروط رأسه (x_0, y_0, z_0) تكون على الصورة

$$f\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$$

فأوجد المعادلة التفاضلية.

الحل

بالاشتقاق جزئياً بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y ونضع

$$u = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad v = \frac{y - y_0}{z - z_0}$$

نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{1}{z - z_0} - p\frac{x - x_0}{(z - z_0)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[-p\frac{y - y_0}{(z - z_0)^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left[-q\frac{x - x_0}{(z - z_0)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{1}{z - z_0} - q\frac{y - y_0}{(z - z_0)^2}\right] = 0$$

بحذف $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ من المعادلتين نحصل على

$$pq = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(z-z_0)^4} = [\frac{1}{z-z_0} - \frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2}][\frac{1}{z-z_0} - \frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2}]$$

$$\therefore \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{(z-z_0)}[\frac{p(x-x_0)}{(z-z_0)^2} + \frac{q(y-y_0)}{(z-z_0)^2}] = 0$$

أي أن

$$(x-x_0)p + (y-y_0)q = (z-z_0)$$

مثال (١٣)

أوجد المعادلة التفاضلية التي تنشأ عن

$$f\ (x+y+z, x^2+y^2-z^2) = 0$$

الحل

نضع $u = x+y+z$ ، $v = x^2+y^2-z^2$ وعليه فإن $f\ (u,v) = 0$

والإشتقاق بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+p) + \frac{\partial f}{\partial v}(2x-2zp) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+q) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y-2zq) = 0$$

وبحذف $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ نجد أن

$$\begin{vmatrix} 1+p & 2x-2zp \\ 1+q & 2y-2zq \end{vmatrix} = 0$$

وعليه يكون

$$2(y-x) + 2(z+y)p - 2(z+x)q = 0$$

مثال (١٤)

إحذف الدوال الاختيارية من المعادلة

$$y = f\ (x-ct) + g\ (x+ct)$$

الحل

بالتفاضل مرتين بالنسبة إلى x ، ثم بالنسبة إلى t نجد أن

$$y_{xx} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$y_{tt} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\therefore y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

تمارين

إحذف الثوابت الإختيارية من كل من المعادلات الاتيه :

1) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

2) $z = axy + b$

3) $ax + by + cz = 1$

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

5) $z = a\, e^{by} \sin bx$

6) $z = ax + by + a^2 + b^2$

7) $z = \left(x - a^2\right) + \left(y - b\right)^2$

8) $ax + b = a^2 x + y$

احذف الدوال الإختيارية من كل من المعادلات الاتية :

1) $f\left(\dfrac{z}{x^2}, x - y\right) = 0$

2) $z = x^2 f(x-y)$

3) $z = f(x+y)$

4) $z = f(x) + e^y g(x)$

5) $z = f(x) + g(y)$

6) $z' = f(xy)$

7) $z = f(x+iy) + g(x-iy)$

8) $z = xy + f(x^2 + y^2)$

9) $z = f\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

10) $z = e^{ax+by} f(ax - by)$

11) $lx + my + nz = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$

12) $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$

٤ - المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى

سوف نقصر دراستنا هنا على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى حيث z متغير تابع بينما x, y متغيرين مستقلين وسوف نستخدم

$$p = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad q = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

وتأخذ المعادلة التفاضلية الجزئية (P.D.E) الصورة

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (1)$$

ويوجد نوعان من الدوال تحقق هذه المعادلة وكل منها يحتوى على عدد لا نهائي من الحلول

النوع الأول: حل يحتوى على ثابتين اختياريين يسمى <u>بالحل التام</u> Complete Solution او <u>بالتكامل التام</u> (Complete Integral).

النوع الثاني: حل يحتوى على دالة اختيارية يسمى <u>بالحل العام</u> (General Solution) او <u>بالتكامل التام</u> (Complete Integral).

أولاً : الحل التام

نفترض أن لدينا المعادلة

$$F(x, y, z, A, B) = 0 \qquad (2)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى x ، إلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0 \qquad (4)$$

بحذف الثابتين A, B من المعادلات (4),(3),(2) نحصل على المعادلة التفاضلية (1) وعليه تكون معادلة (2) تكاملاً تاماً للمعادلة (1).

ثانياً: الحل العام

ليكن

$$u = u(x, y, z) \quad , \quad v = v(x, y, z)$$

بحيث

$$\phi(u, v) = 0 \tag{5}$$

حيث ϕ دالة اختيارية، بالإشتقاق بالنسبة إلى x وإلى y على الترتيب نحصل على

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p\right] + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p\right] = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right] + \frac{\partial\phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q\right] = 0 \tag{7}$$

بحذف $\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\phi}{\partial v}$ من (7),(6) نجد أن

$$(u_x + u_z p)(v_y + v_z q) - (v_x + v_z p)(u_y + u_z q) = 0$$

$$\therefore u_x v_y + u_x v_z q + u_z v_y p + u_z v_z pq - u_y v_x - u_z v_x q - u_y v_z p - u_z v_z pq = 0$$

$$\therefore (u_y v_z - u_z v_y)p + (u_z v_x - u_x v_z)q = u_x v_y - u_y v_x$$

$$Pp + Qq = R \tag{8}$$

حيث

$$P = u_y v_z - u_z v_y \quad , \quad Q = u_z v_x - u_x v_z \quad , \quad R = u_x v_y - u_y v_x$$

$\therefore$ العلاقة (5) هي حل للمعادلة (8) مهما كانت الدالة ϕ والمعادلة (8) معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الأولى.

الآن اعتبر المنحنى (الناتج من تقاطع سطحين)

$u = a \quad , \quad v = b$

حيث a , b ثابتان وبالاشتقاق بالنسبة إلى x إلى y على الترتيب نحصل على

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0 \qquad (9)$$

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \qquad (10)$$

بحل (9),(10) نجد أن

$$\frac{dx}{u_y v_z - u_z v_y} = \frac{dy}{u_z v_x - u_x v_z} = \frac{dz}{u_x v_y - u_y v_x}$$

أى أن

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad (12)$$

أى ان $u = a, v = b$ هما حل للمعادلة (12) ، وبذلك يكون الحل العام للمعادلة
$Pp + Qq = R$

هو $\phi(u, v) = 0$ حيث ϕ دالة اختيارية ، بينما u, v هما حل المعادلة $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

والتي تسمى بمجموعة لاجرانج المساعدة (Lagrange's auxiliary or subsidiary equation)

وهي معادلات تفاضليه عادية

ولحل هذه المعادلات المساعدة توجد أربع طرق :

(أ) إذا كان احد المتغيرات غير موجود أو يمكن حذفه من أي كسرين من المعادلات فإنه يمكن إجراء عملية التكامل والحصول على تكامل (حل) أول $u = c$ وبتكرار هذه العملية نحصل على تكامل ثان $u = c_1$ ويكون الحل العام $\theta(u, v) = 0$ والأمثلة (1) , (2), (9) توضح ذلك .

(ب) نفترض أننا حصلنا على تكامل أول باستخدام (أ) ولكن لا يمكن الحصول على تكامل ثان بنفس الطريقة . ففي هذه الحالة يمكن استخدام التكامل

الأول في إيجاد التكامل الثاني مع مراعاة في التكامل الثاني بحذف ثابت التكامل في الأول المثال (5) يوضح ذلك .

(ج) من مبادئ الجبر فإن أحدى النسب $\frac{dx}{R}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{P}$ تساوي $\frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{P_1P + Q_1Q + R_1R}$ فإذا كان المقام يساوي صفرا فإن البسط يكون $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$ والذي يعطي الحل $u(x, y, z) = c_1$ ويمكن تكرار هذه العملية باختيار آخر للدوال $Q_1(x, y, z), R_1(x, y, z), P_1(x, y, z)$ تسمى P_1, Q_1, R_1 بالضاريب (multipliers) وقد نحصل تكامل أول بهذه الطريقة وتكامل ثان إما باستخدام (أ) أو (ب) والأمثله (3) , (4) , (6) , (7) توضح ذلك .

(د) إذا اختيرت الدوال P_1, Q_1, Z_1 وهي دوال في x , y , z بحيث يكون $\frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{P_1P + Q_1Q + R_1R}$ ساديا لأحد الكسور وسيكون البسط تفاضل المقام . وقد تستخدم دوال آخر P_2 , Q_2 , R_2 للحصول على تكامل ثان أو تستخدم (أ) ، أو (ب) ، او (ج) والأمثله (8) , (10) .

4 - أمثلة :

مثال (١)

اوجد الحل العام للمعادلة

$$2p + 3q = 1$$

الحل

معادلات لأجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{1}$$

حيث $R=1\ ,\ Q=3\ \ ,P=2$

ونجد أن $\frac{dx}{2}=\frac{dy}{3}$ تعطى $3x-2y=b$

و $\frac{dx}{2}=\frac{dz}{1}$ تعطى $x-2z=a$

إذن الحل العام هو

$$\phi(x-2z,3x-2y)=0$$

نلاحظ هنا أن الحل التام هو

$$x-2z=\alpha(3x-2y)+\beta$$

وهو جزء من الحل العام ، حيث x , B ثابتان .

مثال (٢)

حل المعادلة

$$xp+yq=z$$

الحل

نلاحظ أن

$$P=x\quad ,\quad Q=y\quad ,\quad R=z$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة وهي

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ تؤدى الى $\ln x=\ln z+\ln a$ أى $\frac{x}{z}=a$

و $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$ تؤدى الى $\ln y=\ln z+\ln b$ أى $\frac{y}{z}=b$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$zp=-x$$

الحل

$$P=z \quad , \quad Q=0 \quad , \quad R=-x$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\therefore \frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{-x}$$

$$\because dy=0 \quad \therefore y=a$$

$$\because \frac{dx}{z}=\frac{-dz}{x}$$

$$\therefore x^2+z^2=b$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(y,x^2+z^2)=0$$

مثال (٣)

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(y-z)p+(z-y)q=z-x$$

الحل

$$P=y-z \quad , \quad Q=z-y \quad , \quad R=z-x$$

نلاحظ أن

$$P+Q+R=0$$

من المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

حيث أن مجموع المقدمات على مجموع التوالي = إحدى النسب فإن

$$\therefore dx + dy + dz = 0$$

$$\therefore x + y + z = a$$

وباخذ (x , z , y) كمضاريب نجد أن .

$$xP + zQ + yR = 0$$

أي أن

$$\therefore xdx + zdy + ydz = d\left(\frac{x^2}{2} + yz\right) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 + yz = C$$

حيث C عدد ثابت

أي أن

$$x^2 + 2yz = b \quad , \quad b = 2C$$

ويكون الحل العام هو

$$\phi(x + y + z, x^2 + 2yz) = 0$$

ونلاحظ أن الحل التام

$$x^2 + 2yz = \alpha(x + y + z) + \beta$$

مثال (٤)

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$$

الحل

$$P = x^2 - y^2 - z^2 \quad , \quad Q = 2xy \quad , \quad R = 2xz$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي :

$$\therefore \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

وعلى ذلك فإن

من الكسرين الثاني والثالث $\therefore \dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$

نحصل على $\therefore \ln y=\ln z+\ln a$

نحصل على $\therefore \dfrac{y}{z}=a$

وباخذ (x,y,z) كمضاريب نحصل على $\therefore \dfrac{xdx}{x(x^2-y^2-z^2)}=\dfrac{ydy}{2xy^2}=\dfrac{zdz}{2xz^2}$

اي ان $\therefore \dfrac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2-y^2-z^2+2y^2+2z^2)}=\dfrac{zdz}{2xz^2}$

اي ان $\therefore \dfrac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2-y^2-z^2+2y^2+2z^2}=\dfrac{zdz}{z^2}$

$\therefore \ln(x^2+y^2+z^2)=\ln z+\ln b$

اي ان $\therefore \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}=b$

$\therefore$ الحل العام هو

$$\phi\left(\frac{y}{x},\frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)=0$$

ويكون الحل التام هو

$$x^2+y^2+z^2=\alpha y+\beta z$$

مثال (٥)

حل المعادلة

$$p-2q=3x^2\sin(y+2x)$$

الحل :

تكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{3x^2 \sin(y+2x)}$$

من الكسرين الأول والثاني

$$\because \frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2}$$

$$\therefore y + 2x = a$$

من الكسرين الأول والثالث

وكذلك نجد ان

$$\because \frac{dx}{1} = \frac{dz}{3x^2 \sin(a)}$$

$$\therefore z = x^3 \sin a + b$$

$$\therefore z - x^3 \sin(y+2x) = b$$

مثال (٦)

حل المعادلة المساعدة الاتية

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - \ell z} = \frac{dz}{\ell y - mx}$$

الحل

بأخذ (l, m, n) كمضاريب نحصل على :

حيث ان

$$\frac{\ell dx}{\ell(mz - ny)} = \frac{mdy}{m(nx - \ell z)} = \frac{ndz}{n(\ell y - mx)}$$

فإن

$$\therefore \frac{ldx}{mxz - nxy} = \frac{mdy}{nxy - \ell zy} = \frac{ndz}{\ell yz - mxz}$$

$$\therefore \ell dx + mdy + ndz = 0$$

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

$$\therefore \ell x + my + nz = a$$

ويكون حل المعادلة المساعدة هو

$$x^2 + y^2 + z^2 = b$$

مثال (٧)

حل المعادلة

$$(x+y)\,z\,p + z\,(n-y)\,q = x^2 + y^2$$

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

بأخذ (x, y, z) كمضاريب نحصل على

حيث أن

$$(i)\quad \frac{xdx}{xz(x+y)} = \frac{ydy}{yz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2+y^2)}$$

وكذلك بأخذ (y, x, z) كمضاريب نحصل

$$(ii)\quad \frac{ydx}{yz(x+y)} = \frac{xdy}{xz(x-y)} = \frac{zdz}{z(x^2+y^2)}$$

فإن من (i) نجد ان

$$\therefore xdx - ydy - zdz = 0$$

وان من (ii) نجد أن

$$\therefore ydx + xdy - zdz = 0$$

فنحصل على

$$\therefore x^2 - y^2 - z^2 = a$$

وعلى

$$\therefore 2xy - z^2 = b$$

ملحوظة : يمكن أخذ $(x, -y, z)$ ، (y, x, z) كمضاريب ونحصل على نفس الحل .

مثال (٨)

حل المعادلة $(1+y)\,p + (1-x)\,q = z$

الحل

معادلات لاجرانج المساعدة :

$$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}$$

من مبادئ الجبر نجد أن

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx+dy}{2+x+y}=\frac{dx-dy}{y-x}$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على

$$\therefore \ln z=\ln(2+x+y)+\ln a$$

من الكسرين الثاني والثالث نحصل على

$$\ln z=-\ln(y-x)+\ln b$$

أي أن

$$\therefore \frac{z}{(2+x+y)}=a$$

وأن

$$\frac{z}{(y-x)}=b$$

مثال (٩)

مثال حل المعادلة

$$c_1p+c_2q+c_3z=0$$

الحل

حيث أن

$$P=c_1 \quad , \quad Q=c_2 \quad , \quad R=-c_3z$$

فإن

$$\therefore \frac{dx}{c_1}=\frac{dy}{c_2}=\frac{dz}{-c_3z}$$

أي

$$\because \frac{dx}{c_1}=\frac{dy}{c_2}$$

أي

$$\therefore c_1y-c_2x=a$$

كذلك

$$\because \frac{dx}{c_1}=\frac{dz}{-c_3z}$$

أي أن

$$\therefore \ln z = \frac{-c_2}{c_1}x + \ln b$$

ومنها

$$\therefore z = be^{\frac{-c_2}{c_1}x}$$

∴ ويكون الحل العام

$$z = e^{\frac{-c_2}{c_1}x}\phi(c_1 y - c_2 x)$$

مثال (١٠)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^2(x-y)p + x^2(x-y)q = z(x^2+y^2)$$

الحل:

معادلات لاجرانج المساعدة

$$\frac{dx}{y^2(x-y)} = \frac{dy}{x^2(x-y)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)} \qquad (1)$$

من الكسرين الأول والثاني نحصل على $x^3 + y^3 = c_1$

وبأخذ المضاريب $(1, -1, 0)$ فإن كل كسر يساوي .

$$= \frac{dx-dy}{y^2(x-y) + x^2(x-y)} = \frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)} \qquad (2)$$

من الكسر الثالث في (1) مع الكسر في (2) نحصل على

$$\frac{dz}{z(x^2+y^2)} = \frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx-dy}{x-y}$$

وبالتالي

$$\ln z - \ln(x-y) = \ln c_2$$

$$z/(x-y) = c_2$$

ويكون الحل هو

$$Q\left(x^3+y^3, \frac{z}{x-y}\right) = 0$$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية

1) $p + q = z$

2) $3p + 4q = 2$

3) $yq - xp = z$

4) $xzp + yzq = xy$

5) $x^2 p + y^2 q = z^2$

6) $zp + yq = x$

7) $zq + py = xz$

8) $p + q = x$

9) $P + q = y$

10) $y^2 p - xyq = x(z - 2y)$

11) $xzp + yzq = xy$

12) $(z^2 - 2yz - y^2)p + (xy + xz)q = xy - xz$

13) $p + q = 1$

14) $p \tan x + q \tan y = \tan z$

15) $P + q = x + y + z$

16) $z(p - q) = z^2 + (x + y)^2$

17) $xyp + y^2 q = zxy - 2x^2$

18) $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$

19) $py + qx = xyz^2 (x^2 - y^2)$

20) $zp = -x$

21) $z(xp - yq) = y^2 - x^2$

22) $(x - y)p + (x + y)q = 2xz$

٦ - تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية

اولا طريقة فصل المتغيرات :

ليكن $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ حلا وحيدا لمسألة القيمة الحدية.

$$f(u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}, \dots\dots\dots\dots u_{x_nx_n}) = 0$$

فإن طريقة فصل المتغيرات تفترض ان الحل u يمكن كتابته على الصورة

$$u = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \dots f_n(x_n)$$

بالتعويض عن هذا الحل بالصورة السابقة في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه نجد أن الدوال الحقيقية $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3), \dots, f_n(x_n)$ تحقق معادلات تفاضلية عادية يمكن حلها وتحقق الشروط الحدية المعطاه ، والامثلة الاتية توضح لنا ذلك.

مثال (١)

حل المعادلة

$$u_x - 3u_y = 0 \qquad (1)$$

حيث

$$u(0, y) = \frac{1}{2} e^{-2y} \quad , \quad x > 0$$

الحل

نفرض أن الحل يمكن وضعه على الصورة

ومن ذلك نجد أن

$$u = f_1(x) f_2(y)$$

$$\therefore u_x = f_1' f_2 \quad , \quad u_y = f_1 f_2'$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن

$$\therefore f_1' f_2 - 3 f_1 f_2' = 0$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \frac{f_1'}{3 f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = k \qquad \text{(مثلا)}$$

وحيث أن الطرف الأيمن دالة في y والطرف الأيسر دالة x ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت .

$$\frac{f_1'}{3f_1} = k \qquad \text{أي} \qquad f_1 = Ae^{3kx}$$

وكذلك

$$\frac{f_2'}{f_2} = k \qquad \text{أي} \qquad f_2 = Be^{ky}$$

ويكون الحل

$$\therefore u = ce^{k(3x+y)}$$

وبتطبيق الشرط المعطى

$$\therefore u(0,y) = ce^{ky} = \frac{1}{2}e^{-2y}$$

$$\therefore c = \frac{1}{2} \quad , \quad k = -2$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y) = \frac{1}{2}e^{-6x-2y}$$

مثال (٢)

حل معادلة لابلاس

ويكون الحل على الصورة

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

الحل

نفترض أن

$$u(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore u_{xx} = f_1''f_2 \quad , \quad u_{yy} = f_1f_2''$$

وبالتعويض في المعادلة والقسمة على f_1f_2 نحصل على

$$\therefore f_1''f_2 + f_1f_2'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1''}{f_1} + \frac{f_2''}{f_2} = 0$$

وحيث أن الطرف لأيسر دالة في x والطرف الأيمن دالة في y ، ولكي تتحقق المعادلة لابد أن كل طرف يساوي نفس الثابت وليكن k

$$\frac{f_1''}{f_1}=k \quad , \quad \therefore \frac{f_2''}{f_2}=-k$$

يكون لدينا ثلاث حالات للثابت k

$i)\ k>0 \quad , \quad ii)\ k=0 \quad , \quad iii)\ k<0$

$i)\ k>0 \quad \Rightarrow \quad k=\lambda^2$

$\therefore f_1''-\lambda^2 f_1=0 \quad , \quad f_2''+\lambda^2 f_2=0$

وبحل المعادلتين نحصل على

$\therefore f_1=A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x} \quad , \quad f_2=A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y)$

وبذلك يكون الحل

$\therefore u(x,y)=(A_1e^{\lambda x}+B_1e^{-\lambda x})(A_2\cos(\lambda y)+B_2\sin(\lambda y))$

$ii)\ k=0$

وبحل المعادلتين نحصل على

$\therefore f_1=A_1x+B_1 \quad , \quad f_2=A_2y+B_2$

ويكون الحل هو

$\therefore u(x,y)=(A_1x+B_1)(A_2y+B_2)$

$iii)\ k<0 \qquad \therefore k=-\alpha^2$

$\therefore f_1''+\alpha^2 f_1=0 \quad , \quad f_2''-\alpha^2 f_2=0$

وبحل المعادلتين نحصل على

$\therefore f_1=A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x)$

$\therefore f_2=A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y}$

ويكون الحل هو

$\therefore u(x,y)=(A_1\cos(\alpha x)+B_1\sin(\alpha x))(A_2e^{\alpha y}+B_2e^{-\alpha y})$

ملحوظة : لإختيار الحل المناسب لابد من استخدام الشروط المعطاه في المسألة

مثال (٢)

حل المعادلة

$$u_t = u_{xx}$$

تحت الشروط

$$u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$$
$$u(x,0) = 4\sin 3x$$

الحل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore u_{xx} = f''g \quad , \quad u_t = fg'$$

$$fg' = f''g \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g} = c$$

لدينا هنا أيضا ثلاث حالات للثابت c

$$i)\, c > 0\,, \quad ii)\, c = 0\,, \quad iii)\, c < 0$$

$$i)\, c > 0 \quad \Rightarrow \quad c = \lambda^2$$

فنحصل على

$$\therefore \frac{g'}{g} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad g = Ae^{\lambda^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad f = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x}$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,y) = e^{\lambda^2 t}\left(A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}\right)$$

وهذا مستحيل لأنه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x,0) = 4\sin 3x$$

$ii)\ c=0$

فنحصل على

$$\frac{g'}{g}=0 \qquad \therefore g=A$$

$$\frac{f''}{f}=0 \qquad \therefore f=B_1x+B_2$$

ويكون الحل على الصورة

$$\therefore u(x,t)=A_1x+A_2$$

وهذا مستحيل لانه لا يحقق الشرط المعطى وهو

$$u(x,0)=4\sin 3x$$

$iii)\ c<0 \qquad \therefore c=-\alpha^2$

فنحصل على

$$\frac{g'}{g}=-\alpha^2 \qquad \Rightarrow g=Ae^{-\alpha^2 t}$$

وكذلك

$$\frac{f''}{f}=-\alpha^2 \qquad \Rightarrow f=B_1\cos(\alpha x)+B_2\sin(\alpha x)$$

ويكون الحل هو

$$\therefore u(x,t)=e^{-\alpha^2 t}[A_1\cos(\alpha x)+A_2\sin(\alpha x)]$$

وباستخدام الشروط المعطاه نجد أن

$$u(0,t)=0 \quad \Rightarrow \quad A_1=0$$

$$u(\pi,t)=0 \quad \Rightarrow \quad A_2\sin(\alpha\pi)=0$$

إما $A_2=0$ (وهذا مستحيل) أو

$$\therefore \sin(\alpha\pi)=0$$

وهذا يعني أن α عدد صحيح

$$\alpha=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\therefore u(x,t)=A_2e^{-\alpha^2 t}\sin(\alpha x)$$

وباستخدام الشروط المعطى نجد أن

$$u(x,0)=A_2\sin(\alpha x)=4\sin(3x)$$

وهذا يعني

وبذلك يكون الحل على الصورة

$$\alpha = 3 \quad , \quad A_2 = 4$$

$$\therefore u(x,t) = 4e^{-9t}\sin(3x)$$

وهذا هو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الحدية.

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتيه

$$1)\ u_x + u = u_y \quad , \quad u(x,0) = 4e^{-3x}$$

$$2)\ u_t = 4u_{xx} \quad , \quad u(0,t) = 0 = u(4,t) \quad , \quad u(x,0) = 5\sin(\pi x)$$

$$3)\ u_x = 4u_t \quad , \quad u(0,0) = 10 \quad , \quad u(0,4) = 200$$

أوجد جميع الحلول للمعادلة

$$u_{xx} = 2u_{yy} - 12u_y + 4u$$

ثانيا : إستخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عادة فى المسائل التطبيقية التالية

١) معادلة الموجة Wave Equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{احادية البعد}$$

$$\text{ثانية البعد} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

٢) معادلة سريان الحرارة Heat flow equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{k}\right)\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{احادية البعد}$$

$$\text{ثانية البعد} \quad \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 4}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

٣) معادلة لابلاس Laplace equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

٤) معادلة بواسون Poisson equation

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 4}{\partial y^2} = f\ (x , y)$$

٥) معادلة الموجة Radio Equation

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$-\frac{I}{x} = c\frac{\partial V}{\partial t}$$

حيث V هو الجهد ، I التيار L (معامل الحث)

وسوف نستعرض تلك الحالات ببعض الأمثلة

(أ) معادلة الوجهة

مثال (١)

إذا شد خيط وثبت من نقطتين المسافة بينهما ℓ وحدثت إزاحة للخيط على الصورة $y = k(\ell x - x^2)$ عند $t = 0$ ، اوجد الإزاحة عند أي لحظة.

الحل

معادلة الموجة هي

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

وحيث أن نهايتي الخيط مثبتة لكل قيم t فإن

$$y(0,t) = 0 \quad , \quad y(\ell,0) = 0 \qquad (2)$$

وحيث أن السرعة العرضية (Transverse) للخيط عن اي نقطة تكون صفراً أي أن

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=0 \qquad (3)$$

كذلك معطى لنا

$$y(x,0)=k(\ell x-x^2) \qquad (4)$$

وعليه تكون المعادلات $(2),(3),(4)$ هي الشروط الحدية للمعادلة (1).

الآن نفترض أن

$$y=f_1(x).f_2(t)$$

فيكون

$$\therefore y_{tt}=f_1.f_2'' \quad , \quad y_{xx}=f_1''.f_2$$

بالتعويض في (1) نجد ان

$$f_1f_2''=c^2f_1''f_2$$

بالقسمة على f_1f_2 نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=\frac{f_2''}{c^2f_2}=-\alpha^2$$

حيث α^2 ثابت ومنها نحصل على

$$\therefore f_1''+\alpha^2f_1=0$$

$$f_2''+\alpha^2c^2f_2=0$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$\therefore f_1=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x$$

$$f_2=c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct$$

وبالتالي يكون الحل هو

$$\therefore y=(c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x)(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)$$

باستخدام الشرط

$$\because y(0,t)=0$$

$$\therefore c_1(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)=0$$

فإن

$$\therefore c_1=0$$

وبالتالي فإن

$$\therefore y=c_2\sin\alpha x(c_3\cos\alpha ct+c_4\sin\alpha ct)$$

ويكون الحل هو

$$\because\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=0$$

باستخدام الشرط

$$\frac{\partial y}{\partial t}=c_2\sin\alpha x\,(c_3c\alpha\sin\alpha ct+c_4c\alpha\cos\alpha ct)$$

فإن

عندما $t=0$ نجد أن .....

$$\therefore c_2\sin(\alpha x)(c_4c\alpha)=0$$

ولكن $c_3 \neq 0$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore c_4 = 0$$

$$\therefore y = c_2 c_3 \sin(\alpha x)\cos(\alpha c t)$$

$$i.e: \ y = A\sin(\alpha x)\cos(\alpha c t)$$

حيث $A = c_2 c_3$

وباستخدام الشرط

$$\because y(\ell, t) = 0$$

نجد ان

$$\therefore A\sin(\alpha \ell)\cos(\alpha c t) = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha \ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \ell = n\pi \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

$$\therefore \alpha = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$\therefore y(x, t) = A_n \sin(\frac{n\pi}{\ell} x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell} t)$$

وبالتالي يكون لدينا عدد من الحلول وذلك بأخذ قيم n المختلفة وعليه يكون الحل هو مجموع تلك الحلول

$$\therefore y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{\ell} x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell} t)$$

وحيث ان

$$\because y(x, 0) = k(\ell x - x^2)$$

فإن

$$\therefore (\ell x - x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell} x)$$

حيث $A_n = kB_n$

وباستخدام متسلسلة فورير (Fourier) نجد أن

$$B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} (\ell x - x^2)\sin(\frac{n\pi}{\ell} x)dx$$

ولكن

فإن

$$\int x\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}x\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int x^2\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}x^2\cos(mx) + \frac{2x}{m^2}\sin(mx) + \frac{2}{m^3}\cos(mx)$$

$$\therefore B_n = \frac{2}{\ell}\{(\ell x - x^2)(-\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)(\frac{\ell}{n\pi}) + (\ell - 2x)(\sin(\frac{n\pi}{\ell}x))(\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}) -$$

$$2\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)(\frac{\ell^3}{n^3\pi^3})$$

$$= -2\frac{\ell^3}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1](\frac{2}{\ell})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{8\ell^2}{n^3\pi^3} & , n \text{ فردية} \\ 0 & , n \text{ زوجية} \end{cases}$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\ell^2}{n^3\pi^3}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

حيث n عدد فردي .

مثال (٢)

خيط طوله ℓ مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل وأعلى لمسافتين متساويتين من نقطتين على بعد متساوي من الطرفين كما في الشكل. استنتج تعبيرعن إزاحة الخيط عند أي زمن t والثبت ان الازاحة صفر عند نقطة المنتصف.

الحل

الازاحة $y(x,t)$ عند اي نقطة تحقق المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

والشروط الحدية هي :

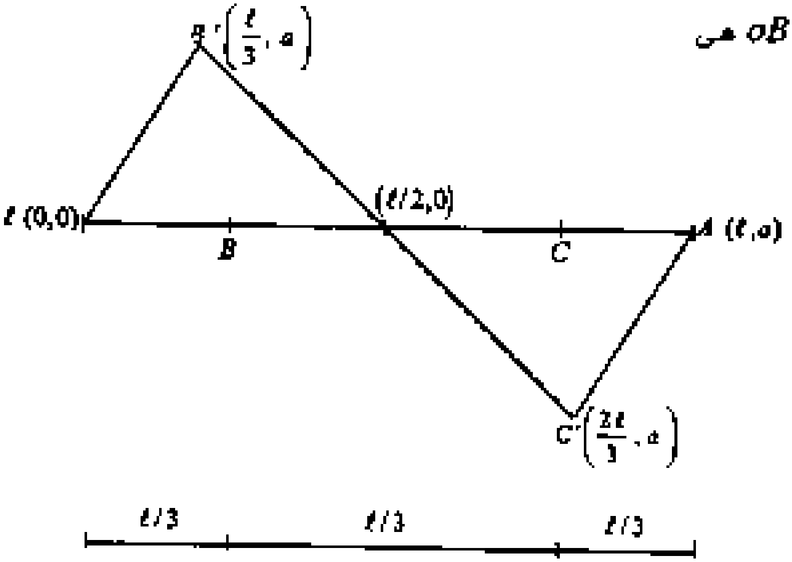
$$y(0,t)=0 \quad , \quad y(\ell,t)=0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} \qquad (3)$$

(لاحظ الشروط الحدية في المثال السابق)

باقي الشروط عند $t=0$ يكون الخيط كما هو مبين بالشكل $B'C'A$

معادلة OB' هي



$$y=\frac{3a}{\ell}x$$

معادلة $B'C'$ هي

$$\frac{y-a}{x-\frac{\ell}{3}}=\frac{a-(-a)}{\frac{\ell}{3}-\frac{2\ell}{3}}$$

أي أن

$$y=\frac{3a}{\ell}(\ell-2x)$$

معادلة $C'A$ هي

$$\frac{y-0}{x-\ell}=\frac{0-(-a)}{\ell-\frac{2\ell}{3}}$$

أي أن

$$y=\frac{3a}{\ell}(x-\ell)$$

وعليه يكون

$$y(x,0)=\frac{3a}{\ell}\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{\ell}{3} \\ (\ell-2x) & \frac{1}{3}\ell\le x\le \frac{2}{3}\ell \\ (x-\ell) & \frac{2}{3}\ell\le x\le \ell \end{cases} \qquad (4)$$

حل المعادلة (1) تحت الشروط الحدية (2),(3) هي(انظر المثال السابق)

$$y(x,t)=\sum B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

$$\therefore y(x,0)=\sum B_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

وباستخدام متسلسلة فورية نحصل على

$$\therefore B_n=\frac{2}{\ell}\{\int_0^{\frac{\ell}{3}}x\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx+\int_{\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}}(\ell-2x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx+$$

$$\int_{\frac{2\ell}{3}}^{\ell}(x-\ell)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx\}(\frac{3a}{\ell})$$

نلاحظ ان

$$\int x\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}x\cos(mx)+\frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(\ell-2x)\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}(\ell-2x)\cos(mx)-\frac{2}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int(x-\ell)\sin(mx)dx = \frac{1}{m^2}\sin(mx)-\frac{1}{m}(x-\ell)\cos(mx)$$

وعلى ذلك فإن

$$\therefore \frac{\ell^2}{6a}B_n = \left\{\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}x\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\right\}_0^{\ell/3}$$

$$\{\frac{-2\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}(\ell-2x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\}_{\ell/3}^{2\ell/3}+$$

$$\{\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)-\frac{\ell}{n\pi}(x-\ell)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\}_{2\ell/3}^{\ell}$$

$$=\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\{\sin(\frac{n\pi}{3})-2\sin(\frac{2n\pi}{3})+2\sin(\frac{n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3})\}-$$

$$\frac{\ell}{n\pi}\{\frac{\ell}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{\ell}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})-\frac{\ell}{3}\cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{\ell}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})\}$$

$$\therefore B_n=\frac{18a}{n^2\pi^2}(\sin(\frac{n\pi}{3})-\sin(\frac{2n\pi}{3}))$$

$$=\frac{18a}{n^2\pi^2}(\sin(\frac{n\pi}{3})-2\sin(\frac{n\pi}{3})\cos(\frac{n\pi}{3}))$$

$$=\frac{18a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})[1+(-1)^n]$$

$$\therefore B_n=\begin{cases}\dfrac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\dfrac{n\pi}{3}) & ,\quad n \quad \text{زوجية}\\ 0 & ,\quad n \quad \text{فردية}\end{cases}$$

$$\therefore y(x,t)=\sum_{n=2,4,\ldots}\frac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\cos(\frac{n\pi c}{\ell}t)$$

باخذ $n=2m$ حيث $m=1,2,3,\ldots$

$$\therefore y(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{9a}{m^2\pi^2}\sin(\frac{2m\pi}{3})\sin(\frac{2m\pi}{\ell}x)\cos(\frac{2m\pi c}{\ell}t)$$

بوضع $x=\frac{1}{2}\ell$ نجد ان

$$y(x,t)=0 \quad \Rightarrow \quad y(\frac{1}{2}\ell,t)=0$$

ب) معادلة سريان الحرارة (احادية البعد)

مثال (١)

قضيب طوله ℓ معزول (Insulated) الجوانب ومنتظم الحرارة ابتدائيا. إذا برد طرفيه لدرجة الصفر وثبت عندها ، اثبت ان حالة الحرارة $u(x,t)$ تعطى من العلاقة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi x}{\ell})\exp\{-\frac{n^2c^2\pi^2}{\ell^2}t\}$$

حيث b_n تعطى من العلاقة

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

الحل

لتكن معادلة سريان الحرارة هي

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نفترض أن الحل على الصورة

$$u(x,t)=f_1(x).f_2(t)$$

$$\therefore u_t=f_1.f_2^{\backprime} \quad , \quad u_{xx}=f_1^{\backprime\backprime}.f_2$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على

$$\therefore f_1 f_2^{\backprime}=c^2 f_1^{\backprime\backprime} f_2$$

وبالقسمة $f_1\, f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1^{\backprime\backprime}}{f_1}=\frac{f_2^{\backprime}}{c^2 f_2}=-\alpha^2 \quad \text{مثلا}$$

ومن ذلك نجد أن

$$f_1^{\backprime\backprime}+\alpha^2 f_1=0 \quad \rightarrow \quad f_1=c_2\cos(\alpha x)+c_3\sin(\alpha x)$$

$$f_2^{\backprime}=-\alpha^2 c^2 f_2$$

$$\therefore f_2=c_1 e^{-\alpha^2 c^2 t}$$

$$\therefore u=e^{-\alpha^2 c^2 t}(A\cos(\alpha x)+B\sin(\alpha x))$$

حيث

$$A=c_1c_2 \quad , \quad B=c_1c_3$$

$$\therefore A=0$$

وباستخدام الشرط $u(\ell,t)=0$ نجد أن

$$Sin\ \alpha\ell=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\ell=n\pi$$

$$\therefore u(x,t)=B_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{\ell^2}}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

(كما سبق) يكون الحل على الصورة

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2t}{\ell^2}}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

من الشروط الابتدائية $u(x,0)=u_0$ نجد أن

$$\therefore u_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

مثال (٢)

إذا كانت A, B هما نهايتي قضيب طوله $20cm$ ودرجتي حرارتهما $30°C$ ، $80°$ على الترتيب حتى تسود حالة التوازن Steady إذا غيرت درجتي حرارة الطرفين إلى $60°C, 40°C$ على الترتيب. اوجد توزيع الحرارة عند الزمن t.

الحل

توزيع الحرارة الابتدائي هو

$$u = 30 + \frac{80-30}{\ell}x = 30 + \frac{5}{2}x$$

والتوزيع النهائي هو

$$u = 40 + \frac{60-40}{\ell}x = 40 + x$$

حيث $\ell = 20$ (طول القضيب)

نفترض أن توزيع الحرارة يعطى من

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x)$$

حيث $u_2(x)$ هو توزيع الحرارة في حالة الاتزان، اي ان $u_2(x) = 40 + x$ ، $u_1(x,t)$ هو توزيع الحرارة الانتقالي والذي يؤول الى الصفر عند زيادة t وتحقق المعادلة

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

فيكون الحل (كما في المثال السابق)

$$\therefore u(x,t) = \sum B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{20}\right)^2 c^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{20}x\right)$$

وعليه يكون

$$u(x,t) = 40 + x + \sum B_n e^{-(\frac{n\pi}{20})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

ولكن عند $t = 0$ فإن

بالتالي يكون لدينا

$$u = 30 + \frac{5}{2}x$$

$$\therefore 30 + \frac{5}{2}x = 40 + x + \sum B_n \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

$$\therefore \frac{3}{2}x - 10 = \sum B_n \sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

كما سبق في أمثلة سابقة ، فإن (باستخدام متسلسله فورير) نجد أن :

$$B_n = \frac{2}{20}\int_0^{20}(\frac{3}{2}x - 10)\sin(\frac{n\pi}{20}x)dx$$

$$= \frac{1}{10}\left\{\frac{3}{2}\left[\frac{400}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{20}x) - \frac{20}{n\pi}x\cos(\frac{n\pi}{20}x)\right]_0^{20} + \frac{200}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{20}x)\Big]_0^{20}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\{\frac{3}{2}[-\frac{400}{n\pi}\cos(n\pi)] + \frac{200}{n\pi}[\cos n\pi - 1]\}$$

$$= \frac{1}{10}\{-\frac{400}{n\pi}\cos n\pi - \frac{200}{n\pi}\}$$

$$\therefore B_n = \frac{-20}{n\pi}(2\cos n\pi + 1)$$

$$\therefore u(x,t) = 40 + x - \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\cos n\pi + 1}{n})e^{-(\frac{n\pi}{20})^2 t}\sin(\frac{n\pi}{20}x)$$

ج) معادلة لابلاس

مثال (١)

حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

التي تحقق الشروط الآتية

$$u(0,y)=u(\ell,y)=u(x,0)=0 \ ,$$

$$u(x,a)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

الحل

نفترض أن الحل على الصورة

$$u=f_1(x)f_2(y)$$

$$\therefore u_{xx}=f_1''f_2 \quad , \quad u_{yy}=f_1f_2''$$

بالتعويض في المعادلة والقسمة على $f_1 f_2$ نحصل على

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}+\frac{f_2''}{f_2}=0$$

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=-\frac{f_2''}{f_2}=-\alpha^2 \qquad \text{مثلا}$$

فنحصل على

$$\therefore f_1''+\alpha^2 f_1=0$$

ويكون حلها هو

$$\therefore f_1=c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x)$$

وكذلك

$$f_2''-\alpha^2 f_2=0$$

ويكون حلها

$$f_2=c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y}$$

ويكون الحل العام هو

$$\therefore u(x,y)=(c_1\cos(\alpha x)+c_2\sin(\alpha x))(c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y})$$

الآن نستخدم الشروط المعطاه لايجاد c_1, c_2, c_3, c_4

$u(0,y)=0 \rightarrow c_1(c_3e^{\alpha y}+c_4e^{-\alpha y})=0 \rightarrow c_1=0$

وبالتالي فإن $\therefore u(x,y)=(Ae^{\alpha y}+Be^{-\alpha y})\sin\alpha x$

حيث $A=c_3c_1 \quad , \quad B=c_2c_4$

وكذلك حيث أن

$u(\ell,0)=0 \rightarrow \sin(\alpha\ell)=0 \rightarrow \alpha\ell=n\pi \rightarrow \alpha=\frac{n\pi}{\ell}$

ويكون الحل على الصورة

$\therefore u(x,y)=(Ae^{\frac{n\pi}{\ell}y}+Be^{-\frac{n\pi}{\ell}y})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$

وحيث أن

$u(x,0)=0 \rightarrow (A+B)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)=0$

$\therefore A=-B=C$ مثلا

فيكون الحل على الصورة

$\therefore u(x,y)=C(e^{\frac{n\pi}{\ell}y}-e^{-\frac{n\pi}{\ell}y})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$

ومنها

$\therefore u(x,y)=2C\sinh(\frac{n\pi}{\ell}y)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$

باستخدام الشرط المعطى نجد أن .

$u(x,a)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)=2C\sinh(\frac{n\pi a}{\ell})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$

$\therefore C=\dfrac{1}{2\sinh(\frac{n\pi a}{\ell})}$

ويكون الحل النهائي على الصورة

$\therefore u(x,y)=\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\dfrac{\sinh(\frac{n\pi}{\ell}y)}{\sinh(\frac{n\pi}{\ell}a)}$

د) معادلات البث

مثال (١)

حل المعادلات الآتية

$\frac{\partial V}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t}$

والتي تحقق الشروط الآتية

$$I(x,0)=I_0 \quad , \quad V(x,0)=V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

الحل

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (2)$$

بتفاضل المعادلة (١) بالنسبة إلى x والمعادلة (٢) بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-L\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 I}{\partial t\,\partial x}=-c\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

منها نحصل على

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=Lc\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

نفترض أن

$$V=f_1(x)f_2(t)$$

فيكون

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=f_1''f_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=f_1f_2''$$

بالتعويض في المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore f_1''f_2=Lcf_1f_2''$$

وبالقسمة على f_2f_1 نجد ان ......

$$\therefore \frac{f_1''}{f_1}=Lc\frac{f_2''}{f_2}=-\alpha^2 \qquad \text{مثلا}$$

(وكما سبق) نجد ان

$$f_1 = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)$$

$$f_2 = c_3 \cos\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right) + c_4 \sin\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right)$$

ويكون الحل هو

$$\therefore V(x,t) = (c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))\left(c_3 \cos\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right) + c_4 \sin\left(\frac{\alpha t}{\sqrt{Lc}}\right)\right)$$

ومن الشروط

$$V(x,0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

نحصل على

$$\therefore V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = c_3(c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))$$

ومنها نجد أن

$$\therefore c_1 c_3 = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$c_2 c_3 = V_0 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{\ell}$$

ويكون الحل $v(x,t)$ على الصورة

$$\therefore V(x,t) = \left[V_0 \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) + A \sin\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

حيث $A = c_2 c_4$

وباستخدام الشروط المعطاة أي عندما $t = 0$ فإن

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \;, V(x,0) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \frac{\partial I}{\partial x} = 0 \;, I = I_0 =$$ ثابت

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\left[-V_0 \frac{\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \sin\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right) + \frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}} \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right)\right]$$

وعندما $t = 0$ نجد ان

$$\therefore 0 = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\left[\frac{A\pi}{\ell\sqrt{Lc}}\right] \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\therefore V(x,t) = V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}\right).$$

ولإيجاد $I(x,t)$ نتبع التالي

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{1}{L}\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=-\frac{V_0}{L}\frac{\pi}{\ell}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\cos(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})$$

$$\therefore I=-\frac{V_0\pi}{\ell L}\cdot\frac{\ell\sqrt{Lc}}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+f(x)$$

$$\therefore I(x,t)=-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+f(x)$$

حيث $f(x)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى t)

أيضا

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-c\frac{\partial V}{\partial t}=cV_0\frac{\pi}{\ell\sqrt{Lc}}\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})\sin(\frac{\pi x}{\ell})$$

$$\therefore I=\frac{cV_0\pi}{\ell\sqrt{Lc}}\cdot\frac{\ell}{\pi}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+F(t)$$

$$\therefore I(x,t)=-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}})+F(t)$$

حيث $F(t)$ ثابت (التكامل بالنسبة إلى x)

وحيث أن $I=I_0$ عند $t=0$

$$I(x,t)=I_0-V_0\sqrt{\frac{c}{L}}\cos(\frac{\pi x}{\ell})\sin(\frac{\pi t}{\ell\sqrt{Lc}}).$$

تمارين

١) حل المعادلة

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

في الحالات الاتية

أ) $u=0$ عندما $x=0$, $x=\ell$ لجميع قيم t.

ب) $u=3\sin(\frac{\pi x}{\ell})$ عندما $t=0$ لجميع قيم x حيث $0<x<\ell$

٢) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

التي تحقق الشروط

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\phi(x)$$

٣) حل المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

التي تحقق الشروط الاتية

$$y(0,t)=y(\ell,t)=0$$

$$y(x,0)=\phi(x) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$$

٤) اوجد حل المعادلة $\frac{\partial y}{\partial t}=3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ تحت الشرط

$$u(0,t)=2,2(1,t)=3,u(x,0)=x(1-x)$$

$$t>0\ ,\ 0=\le x\ \le 1$$

٥) أوجد الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ تحت الشروط

$u\ (0,1) = 0\ ,\ u\ (a\ ,t\ ) = 0$

$u\ (x\ ,o\ ) = f\ \ (x\ )$

$\frac{\partial u}{\partial t} = u\ (x\ ,\ 0\ ) = g\ \ (x\ )$

٦) أوجد الحل العام للمعادلة : $\frac{\partial u}{\partial t} = 3\,\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$

$u\ (\ 0\ ,t\ ) = 0\ \ ,u\ (\ 2\ ,\ 0\ ) = 0\ ,\ t\ 70\ ,\ 0\ < x\ \ < 2$

$u\ (\ x\ \ ,\ 0) = x\ \ \ ,\ 0 < x\ \ < 2$

الباب الثامن

متسلسلة فورييـر

Fourier Series

الباب الثامن

متسلسلة فورير

Fourier Series

١- مقدمة :

لقد اثبت فورير انه يمكن التعبير عن دالة ما وحيدة القيمة على مدى محدود على الصورة

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

حيث $a_0, a_i, b_i, \ldots$ ، $i=1,2,3,\ldots$ ثوابت.

تسمى هذه العملية بالتحليل التوافقي harmonic analysis . وتسمى المتسلسلة (1) بمتسلسلة فورير للدالة $f(x)$. كما نلاحظ أنه إذا تغيرت x بالمقدار 2π أو أي من مضاعفاتها الموجبة أو السالبة ، فإن كل حد من الطرف الأيمن في (1) لايتغير أي أن منحنى الدالة يكرر نفسه كل فترة 2π.

٢- الدالة الدورية Periodic Function

يقال أن الدالة $f(x)$ دالة دورية ولها الدورة T إذا كان

$$f(x+T)=f(x)$$

حيث T عدد ثابت.

نلاحظ أن $\sin x, \cos x, \tan x, \sin 3x, \cos\frac{x}{5}, \tan(\frac{4}{3}x)$ لهم الدورة $2\pi, 2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, 10\pi, \frac{3}{4}\pi$ على الترتيب.

٣- منحنى الدالة الدورية

يكفي للدالة الدورية $f(x)$ التي لها الدورة T ان نرسمها على الفترة $[0,T]$ مثلاً ، ثم نكرر منحناها على كل فترة أخرى طولها T.

٤- نظرية تكامل الدالة الدورية

ليكن $f(x)$ دالة دورية لها الدورة T فإن

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

البرهان

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx \int_T^{a+T} f(x)dx$$

ولكن

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x_1+T)dx_1 = \int_0^a f(x_1)dx_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

ونلاحظ أن

$$\int_{-T}^{0} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_{2T}^{3T} f(x)dx.$$

٥- تغير الدورة

نعرف أنه ليست كل الدوال لها الدورة 2π ولذلك سنلتجاء إلى تغير دورة الدالة 2π.
ليكن $f(x)$ لها الدورة T ، أي أن $f(x+T)=f(x)$ لكل قيم x. ونفرض أن $x = ku$ حيث k ثابت موجب. وعلى ذلك فإن

$$f(ku+T) = f(ku)$$

وليكن $f_1(u) = f(ku)$ وعلى ذلك فإن

$$f(ku+T) = f(k(u+\frac{T}{k})) = f_1(u+\frac{T}{k})$$

$$\therefore f_1(u+\frac{T}{k}) = f_1(u)$$

وعلى ذلك فإن $f_1(u)$ دالة دورية لها الدورة $\frac{T}{k}$ ، نختار k بحيث أن $\frac{T}{k}=2\pi$ وعلى ذلك فإن $k=\frac{T}{2\pi}$. ومن ذلك نرى أن التحويل $x=\frac{T}{2\pi}u$ يحول الدالة $f(x)$ إلى الدالة $f_1(u)$ والتي لها الدورة 2π.

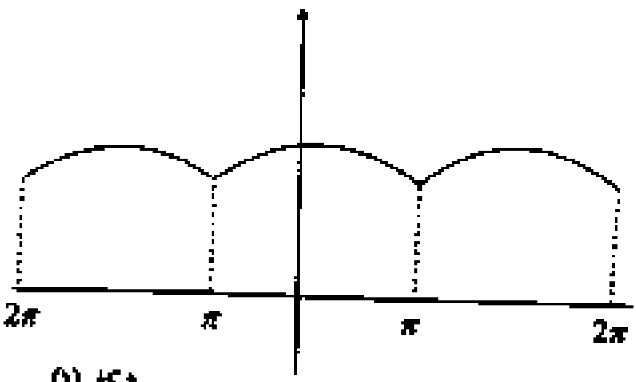
٦- أنواع خاصة من الدوال الدورية

يوجد أربعة أنواع من الدوال الدورية والتى تتميز بصفة التماثل (بدرجة ما) ويمكن التميزفيما بينهم بمجرد النظر إلى منحنياتها.

(أ) الدالة الزوجية Even function

هى دالة دورية لها الدورة 2π ولها الخاصية $f(x)=f(-x)$

وفيها $f(\pi+x)=f(\pi-x)$ كما في شكل (١).



شكل (١)

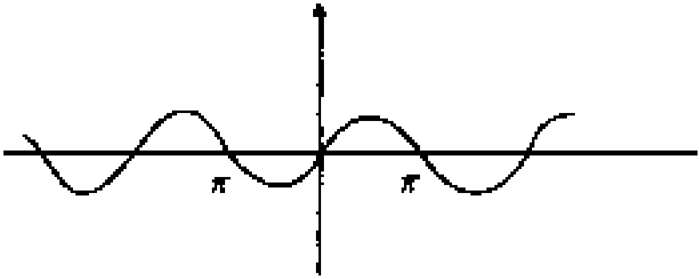
وذلك لأن

$$f(\pi+x)=f(-\pi-x)=f(2\pi-\pi-x)=f(\pi-x)$$

تبين العلاقة $f(x)=f(-x)$ أن منحنى الدالة متماثل حول المحور y ، بينما تبين العلاقة $f(\pi+x)=f(\pi-x)$ أن المنحنى متماثل حول المستقيم $x=\pi$.

(ب) الدالة الفردية Odd function

لها الخاصية $f(x) = -f(-x)$ كما في شكل (٢)



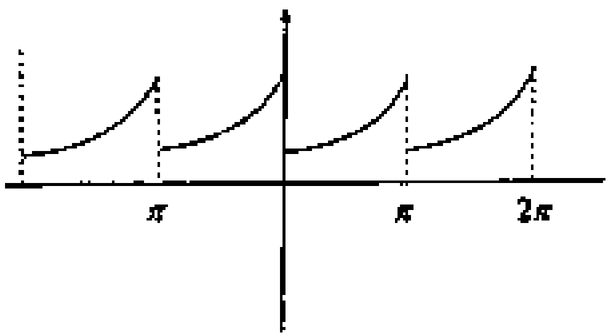
شكل (٢)

ونلاحظ أن $f(0) = 0$ ، $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$

وأن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

ج) دالة زوجية التوافق Even harmonic function

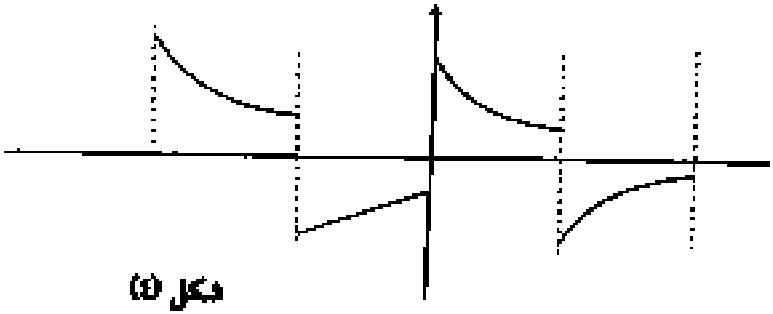
ولها الخاصية $f(\pi + x) = f(x)$ كما في شكل (٣)



شكل (٣)

د) دالة فردية التوافق **Odd harmonic function**

ولها الخاصية $f(\pi + x) = -f(x)$ كما في شكل (٤)



شكل (4)

٧) بعض التكاملات الهامة

سوف نحتاج إلى بعض التكاملات المحدودة في دراستنا لمتسلسلة فورير وهي

$$i)\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0$$

وحيث n عدد صحيح موجب

$$ii)\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx) = 0\ , \qquad m \neq n$$

$$iii)\ \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$$

n عدد صحيح

نظرية: أي دالة دورية ، وحيدة القيمة ولها الدورة 2π يمكن التعبير عنها بالمتسلسلة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] \qquad (1)$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

البرهان

بتكامل المتسلسلة (١) بالنسبة إلى x من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2}a_0 2\pi = \pi a_0$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

وبضرب طرفي (١) في $\cos(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0 + a_n\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)dx = 0 + a_n\pi$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

وبالمثل بضرب طرفي (١) في $\sin(nx)$ والتكامل من 0 إلى 2π نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

قد إستخدمنا في البرهان نتائج التكاملات المحدودة الخاصة السابق ذكرها.

٨- تبسيط معاملات فورير

سوف نعطي بعض التبسيط لمعاملات متسلسلة فورير للدالة الدورية $f(x)$ ولها الدورة 2λ (عموماً).

(أ) دوال دورية لها خاصية واحدة

i) الدالة الزوجية

ولها الخاصية $f(-x)=f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها هي

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{\lambda})x$$

حيث

$$a_0=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)dx \quad , \quad a_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\cos(\frac{n\pi}{\lambda}x)dx \quad , \quad b_n=0$$

ii) الدالة الفردية

ولها الخاصية $f(-x)=-f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها هي

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi x}{\lambda})$$

حيث

$$b_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)\sin(\frac{n\pi x}{\lambda})dx \quad , \quad a_n=a_0=0$$

iii) دالة زوجية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda+x)=f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2m}\cos(\frac{2m\pi}{\lambda}x)+b_{2m}\sin(\frac{2m\pi}{\lambda}x)$$

حيث

$$a_0=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)dx \quad , \quad a_{2m}=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(\frac{2m\pi}{\lambda}x)dx$$

$$b_{2m}=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin(\frac{2m\pi}{\lambda}x)dx$$

ب) دالة فردية التوافق

ولها الخاصية $f(\lambda+x)=-f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x+b_{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$a_{2m+1}=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx$$

$$b_{2m+1}=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx$$

(ب) دوال دورية لها خاصيتين:

أ) دالة زوجية وزوجية التوافق

لها الخاصية $f(\lambda+x)=f(x)$, $f(-x)=f(x)$ وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}\cos(2m\frac{\pi}{\lambda}x)$$

حيث

$$a_0=\frac{4}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x)dx \quad , \quad a_{2m}=\frac{4}{\lambda}\int_0^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\cos(2m\frac{\pi}{\lambda}x)dx$$

ب) دالة زوجية وفردية التوافق :

لها الخاصية $f(\lambda+x)=-f(x)$, $f(-x)=f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث أن

$$a_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}xdx$$

ثالثاً) دالة فردية وزوجية التوافق :

لها الخاصية $f(\lambda+x)=f(x)$ ، $f(-x)=-f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_{2m}\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث

$$b_{2m}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}xds$$

4) دالة فردية وفردية التوافق

لها الخاصية $f(\lambda+x)=-f(x)$ ، $f(-x)=-f(x)$

وتكون متسلسلة فورير لها على الصورة

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_{2m+1}\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x$$

حيث أن

$$b_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\sin(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}xdx$$

ملحوظة : إذا كانت الدالة $f(x)$ لها الدورة 2π فإننا نضع في العلاقات السابقة 2π بدلاً من 2λ ونحصل على علاقات بسيطة.

(٨) أمثلة :

مثال (١)

أوجد متسلسلة فورير للدالة

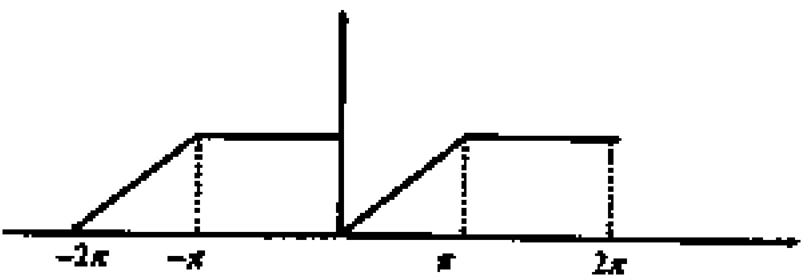
$$f(x)=\begin{cases} x & , \ 0\le x\le \pi \\ \pi & , \ \pi\le x\le 2\pi \end{cases}$$

الحل

الدالة المعطاة لها الدورة 2π . ومن الشكل نرى أنها لاتحقق أي من الخواص الأربعة وهي

$$f(-x)=\pm f(x), \qquad f(\lambda+x)=\pm f(x)$$

وبذلك نستخدم الصيغة العامة



شكل ٥

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi}xdx+\int_{\pi}^{2\pi}\pi dx\}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \frac{1}{2}a_0 = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos(nx)dx\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} + 0] = \frac{\cos(n\pi)-1}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\{\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin(nx)dx\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi}{n}(\cos(n\pi)-1)] = \frac{-1}{n}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\cos(nx) - \frac{1}{n}\sin(nx)$$

مثال (٢)

أوجد متسلسلة فورير للدالة

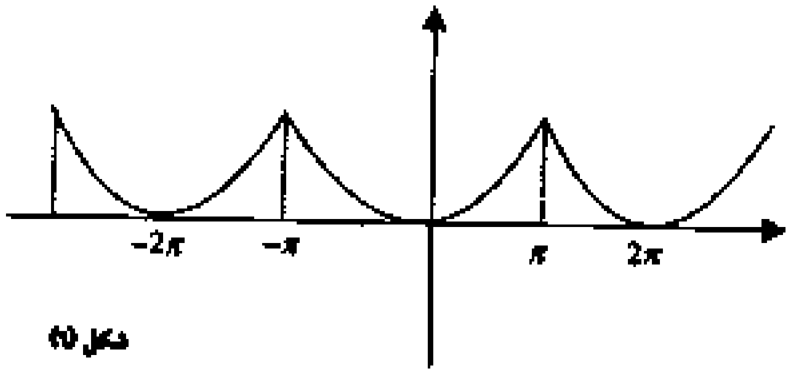
$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$$

وأثبت أن

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

الحل

الدالة لها الدورة 2π ومن الشكل نرى أنها دالة زوجية أي أن $f(x) = f(-x)$ و على ذلك فإن $b_n = 0$ وتكون



شكل (٤)

$$f(x)\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(n\pi)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos(nx)dx=\frac{4\cos(n\pi)}{n^2}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

وبذلك يكون

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}4(-1)^n\frac{\cos(n\pi x)}{n^2} \qquad (1)$$

بوضع $x=0$ نحصل على

$$0=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\right] \qquad (2)$$

وبوضع $x=\pi$ في (١) نحصل على

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\ldots\right]$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \qquad (3)$$

من (٢) ، (٣) نحصل على

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢)

عبر عن الدالة

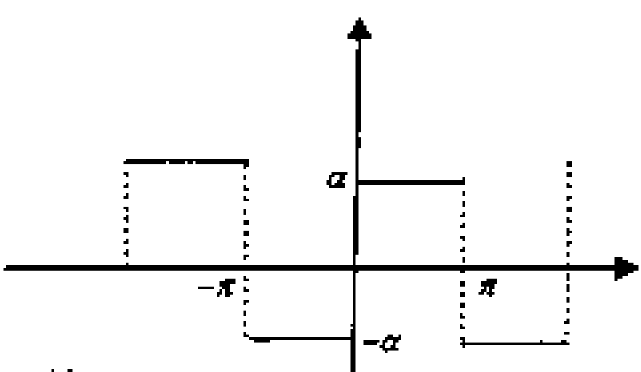
$$f(x) = \begin{cases} a & , \quad 0 < x < \pi \\ -a & , \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

في صورة متسلسلة فورير.

الحل

من الشكل نرى أن $f(x+\pi) = -f(x) \quad , \quad f(x) = -f(-x)$

أي أن الدالة فردية ولها خاصية فردية التوافق وتكون متسلسلة فورير على الصورة



شكل (٧)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1} \sin(2m+1)x$$

حيث ان

$$b_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2m+1)x\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin(2m+1)x\,dx$$

$$= \frac{4a}{\pi(2m+1)}$$

وبذلك يكون

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)}{2m+1}$$

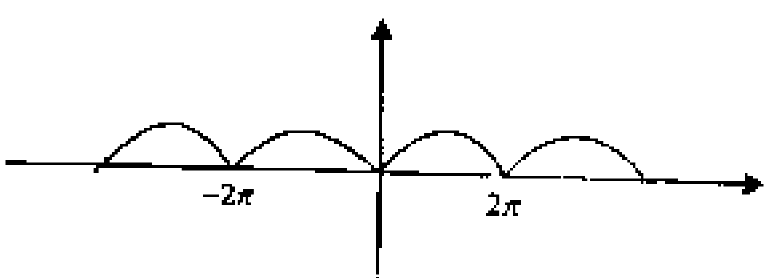
مثال (٤)

عبر عن الدالة $0 < x < 2\pi$ ، $f(x) = |\sin x|$ بدلالة متسلسلة فوريير

الحل

نرى من الشكل ان الدالة زوجية وكذلك لها خاصية زوجيه التوافق اي أن

$$f(x) = f(-x) \quad , \quad f(x+\pi) = f(\pi)$$



شكل (١)

وبذلك تكون متسلسلة فورير على الصورة

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}\cos(2mx)$$

حيث

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_{2m} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2mx)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos(2mx)dx = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+2m)(1-2m)}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2m)(1-2m)}\cos(2mx) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4m^2)}\cos 2mx$$

مثال (٥)

أوجد متسلسلة الجيب ومتسلسلة جيب التمام للدالة

$$f(x) = x - 4 \quad , \quad 0 < x < 4$$

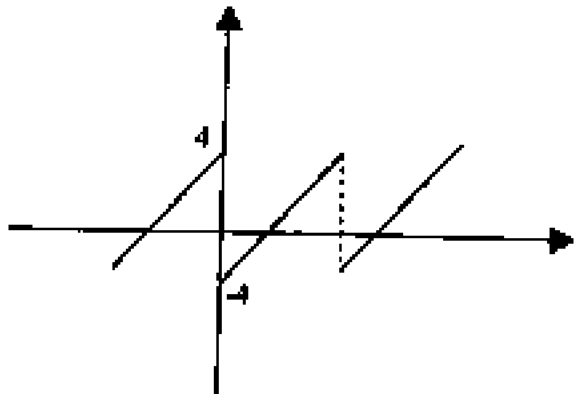
حيث الدالة $f(x)$ داله دورية لها الدورة $2\lambda = 8$.

الحل

(أ) متسلسلة الجيب:

حيث ان $f(x) = -f(-x)$ وترى من الشكل أيضاً $f(x+\lambda) = f(x)$ $\lambda = 4$

وبذلك تكون متسلسلة فورير على الصورة



شكل (٩)

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin(\frac{m\pi}{2})x$$

حيث أن

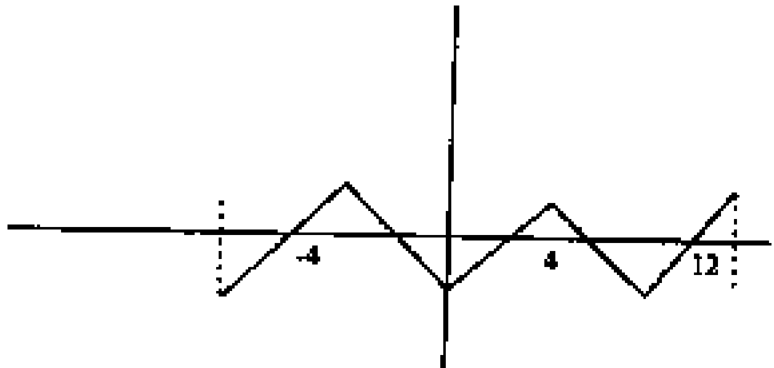
$$b_{2m}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}} f(x)\sin(2m)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx=\frac{4}{4}\int_{0}^{2}(2x-4)\sin(\frac{m\pi x}{2})dx=\frac{-8}{m\pi}$$

وعلى ذلك فإن

$$f(x)=\frac{-8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin(\frac{m\pi x}{2}).$$

ب) متسلسلة جيب التمام:

اي ان $f(-x)=f(x)$ ومن الشكل نرى ان $f(x+\lambda)=-f(x)$، وبذلك تكون متسلسلة فورير كما في الشكل



شكل (١٠)

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}x$$

حيث ان

$$a_{2m+1}=\frac{4}{\lambda}\int_{0}^{\frac{\lambda}{2}}f(x)\cos(2m+1)\frac{\pi}{\lambda}x\,dx=\frac{4}{4}\int_{0}^{2}(2x-4)\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}\,dx$$

$$=\frac{-16}{(2m+1)^2\pi^2}$$

وبذلك تكون متسلسلة فورير هى

$$f(x)=\frac{-16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}x.$$

تمارين

١- أوجد متسلسلة فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}x & , \quad 0<x<a\\[2ex] \dfrac{b}{\pi-a}(\pi-x) & , \quad a<x<\pi\end{cases}$$

٢- اوجد متسلسلة فورير للدالة

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & , \quad 0<x<\pi\\ -e^{-|x+1|} & , \quad -\pi<x<0\end{cases}$$

٣- عبر عن الدالة $f(x)=1-$ جا x ، $0<x<\frac{\pi}{2}$ في صورة متسلسلة فورير فردية وزوجية الترافق .

٤- فك الدالة

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad -6\le x\le -3\\ x+3 & , \quad -3\le x\le 0\\ 3-x & , \quad 0<x\le 3\\ 0 & , \quad 3\le x\le 6\end{cases}$$

في صورة متسلسلة فورير

٥- أوجد متسلسلة فورير للدوال

$$(i)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x & , \quad 0<x<\pi\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}+x & , \quad -\pi<x<0\end{cases}$$

$$(ii)\ f(x)=\begin{cases}1-\cos x & , \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \sin x & , \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

واستنتج ان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

٦ - فك الدالة $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ في صورة متسلسلة فورير على الـ $[-\pi,\pi]$

واثبت ان ...... $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+$

٧ - أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)=|x|$ على الفترة $[-b1]$

٨ - أوجد متسلسلة فورير للدالة $f(x)=\begin{cases}-2x & -\pi<x<0\\ 3x & 0\le x\le\pi\end{cases}$

٩ - أوجد متسلسلة فورير للدوال التالية :

$(i)\ f(x)=x|x|\ \text{in}\ -\pi\le x\le\pi$

$(ii)\ f(x)=e^{x}\quad -\pi\le x\le\pi$

$(iii)\ f(x)=|x\sin x|\quad -6\le x\le 6$

$(iv)\ f(x)=2x+1\ ,\ -1\le x\le 1$

$$(v)\ f(x)=\begin{cases}0 & -3\le x<0\\ 1 & 0\le x<3\end{cases}$$

$$(vi)\ f(x)=\begin{cases}0 & -4\le x\le 0\\ 2 & 0<x\le 4\end{cases}$$

الباب التاسع

مسائل شترم ليوفيل

Liouville -Sturm Problem

الباب التاسع
مسائل شترم ليوفيل
Sturm-Liouville Proplem

١ - مقدمة :

نعتبر مسألة القيمة الحدية التالية :

أ- معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية على الصورة :

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + [q(x) + \lambda r(x)\frac{dy}{dx}]y = 0 \qquad (1)$$

حيث p و q و r دوال حقيقية بحيث p لها مشتقة متصلة و q و r دالتان متصلتان و $p > 0$ و $r > 0$ لكل قيم x على الفترة $a \leq x \leq b$ و λ بارا متر لا يعتمد على x .

ا- شرطان حديان

$$\left.\begin{array}{l} A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث A_1 و A_2 و B_1 و B_2 ثوابت بحيث إن A_1 و A_2 لا يتلاشيان معاً وكذلك B_1 و B_2 لا يتلاشيان معاً.

تسمى هذه المسألة بمسألة شترم- ليوفيل أو نظام شترم- ليوفيل .

٢- أمثلة

مثال (١):

لنفترض الآن مسألة القيمة الحدية

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 \qquad (3)$$

$$y(0)=0 \quad ,y'(\pi)=0 \qquad (4)$$

وهي مسألة شترم- ليوفيل، ويمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة .

$$\frac{d}{dx}(1.\frac{dy}{dx})+(0+\lambda.1\frac{dy}{dx})y=0$$

اي ان $p=1$ و $q=0$ و $r=1$ والشروط الحدية (4) حالة خاصة من الشروط (٢).

مثال (٢) :

ليكن لدينا مسألة شترم- ليوفيل :

$$\frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}]+(2x^3+\lambda x^3)y=0 \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}3y(1)+4y'(1)=0\\5y(2)-3y'(2)=0\end{array}\right\} \qquad (6)$$

حيث $p=x$, $q=2x^3$, $r=x^3$, $a=1$, $b=2$, $A_1=3$, $A_2=4$, $B_1=5$ و $B_2=-3$ ، ومن الواضح أن الحل البديهي $y=0$ يحقق المعادلة والشروط المعطاة، لذلك نبحث عن الحل غير البديهي (غير الصفري) الذي يحقق المعادلة والشروط المعطاة ويلاحظ أن هذا الحل يعتمد على λ .

مثال (٣) :

إوجد الحلول غير البديهية لمسألة شترم ليوفيل

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 \qquad (3)$$

$$y(0)=0 \quad ,y(\pi)=0 \qquad (4)$$

الحل :

سندرس ثلاث حالات منفصلة وهي $\lambda = 0$ ، $\lambda < 0$ و $\lambda > 0$.

(i) $\lambda = 0$ ، في هذه الحالة تؤول المعادلة التفاضلية (3) إلى

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

ويكون حلها هو

$$y = c_1 + c_2 x \qquad (7)$$

وباستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = c_1 = 0, y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0$$

وهذا يؤدي إلى $c_1 = c_2 = 0$ وبذلك نحصل على الحل الصفري أي نرفض هذا الحل.

(ii) $\lambda < 0$ ، في هذه الحالة تكون المعادلة المساعدة $m^2 + \lambda = 0$ و جذراها هما $\pm\sqrt{-\lambda}$ ، وحيث إن $\lambda < 0$ ، فإن هذين الجذرين حقيقيان وغير متساويين وبوضع $\sqrt{-\lambda} = \alpha$ ، فيكون الحل هو

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \qquad (8)$$

و باستخدام الشروط (٤) نجد أن

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0,$$
$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\alpha\pi} + c_2 e^{-\alpha\pi} = 0$$

و بحل هاتين المعادلتين نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ ، وهذا يؤدي إلى الحل الصفري ونرفض هذا الحل أيضاً .

(iii) $\lambda > 0$ ، في هذه الحالة يكون جذرا المعادلة المساعدة هما $\pm\sqrt{\lambda}i$ ويكون الحل على الصورة .

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x \tag{9}$$

باستخدام الشرط $y(0) = 0$ نحصل على $c_2 = 0$ ، وباستخدام الشرط $y(\pi) = 0$ فنحصل على $c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ في هذه الحالة لا نأخذ $c_1 = 0$ و إلا حصلنا على الحل الصفري، و هو غير مطلوب ولذلك نضع $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ ، فإذا كان $n > 0$ ، فإن $\sin n\pi = 0$ فقط إذا كان n عدد صحيح $\sqrt{\lambda} = n, n = 1,2,3,.....$

وعلى ذلك

$$\lambda = n^2, \qquad n = 1,2,3,..... \tag{10}$$

تسمى هذه القيمة بالقيم الذاتية(Characteristic values) ويسمى الحل غير الصفري المناظر بالدوال الذاتية (المميزة) (Characteristic functions). و بذلك تكون الدوال الذاتية $y = c_n \sin nx, n = 1,2,3,...$ حيث $c_n, n = 1,2,3,...$ ثوابت اختيارية غير صفرية.

مثال (4):

إوجد القيم الذاتية والدوال الذاتية لمسألة شتورم- ليوفيل

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0 \tag{11}$$

$$y'(1) = 0 \quad , y'(e^{2\pi}) = 0 \tag{12}$$

حيث λ بارامتر غير سالب.

الحل:

سوف ندرس الحالتين $\lambda = 0$ و $\lambda > 0$.

إذا كانت $\lambda = 0$ ، فإن المعادلة التفاضلية (11) تؤول إلى $\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) = 0$ ،

ويكون حلها العام هو

$$y = c \ ln|x| + c_*$$

حيث c_* و c ثابتان اختياريان. إذا طبقنا الشروط (12) لهذا الحل نجد أن كليهما $c = 0$ ولكن أي منها لم يضع أي قيود على c_* ، وبالتالي $\lambda = 0$ تعطي الحل $y = c_*$ ، حيث c_* ثابت اختياري. وعلى ذلك يكون $\lambda = 0$ القيمة الذاتية والدالة الذاتية المناظرة هي $y = c_*$.

أما إذا كانت $\lambda > 0$ ، فإننا نرى أنه عندما تكون $x \neq 0$ ، فإن المعادلة تؤول إلى معادلة كوشي – أويلر

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad (13)$$

وباستخدام التعويض $x = e^t$ فإن المعادلة (13) تؤول إلى

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y = 0 \qquad (14)$$

وحيث إن $\lambda > 0$ فإن الحل العام للمعادلة (14) يكون

$$y = c_1 \sin\sqrt{\lambda}t + c_2 \cos\sqrt{\lambda}t$$

وبالتالي عندما $\lambda > 0$ و $x > 0$ ، يمكن كتابة حل المعادلة (١١) على الصورة

$$y = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ ln\ x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\ ln\ x) \qquad (15)$$

والآن باستخدام الشروط الحدية (12)، فإننا من (15) نجد أن

$$y=\frac{c_1\sqrt{\lambda}}{x}\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)-\frac{c_2\sqrt{\lambda}}{x}\sin(\sqrt{\lambda}\ln x) \qquad (16)$$

حيث $x>0$ باستخدام الشرط $y'(1)=0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ln 1)-c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\ln 1)=0$$

أي $c_1\sqrt{\lambda}=0$ (لأن $\ln 1=0$)، لذلك يجب أن نأخذ

$$c_1=0 \qquad (17)$$

وباستخدام الشرط الثاني $y'(e^{2\pi})=0$ في المعادلة (16) نحصل على

$$c_1\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\cos(\sqrt{\lambda}\ln e^{2\pi})-c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\sin(\sqrt{\lambda}\ln e^{2\pi})=0$$

حيث إن $c_1=0$ من (17) وإن $\ln e^{2\pi}=2\pi$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى

$$c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi}\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0$$

وحيث إن $c_1=0$ ، فإن اختيار $c_2=0$ يؤدي إلى الحل الصفري، لذلك نأخذ $\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0$ وبالتالي $2\pi\sqrt{\lambda}=n\pi$ حيث $n=1,2,3,\dots$ وعلى ذلك لتحقيق الشرط الثاني يجب أن يكون

$$\lambda=\frac{n^2}{4},\quad n=1,2,3,\dots \qquad (18)$$

وطبقاً لقيمة λ هذه، و $x>0$ فإن الحلول غير الصفرية

$$y = c_n \cos(\frac{n \ln x}{2}), \quad n = 1,2,3,... \qquad (19)$$

حيث $c_n, n = 1,2,3,...$ ثوابت اختيارية ، وعلى ذلك فإن قيم $\lambda = 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, ...$ معطاة بالعلاقة (18)، $n \geq 0$ هي القيم الذاتية للمسألة المعطاة، وان الدوال $c_0, c_1 \cos(\frac{\ln x}{2}), c_2 \cos(\ln x), c_3 \cos(\frac{3 \ln x}{2}), ...$ المعطاة المعادلة بالعلاقة (19)، $n \geq 0$ حيث $c_n, n = 0,1,2,3,...$ ثوابت اختيارية غير صفرية هي الدوال الذاتية المناظرة.

في كل مسائل شترم – ليوفيل المعطاة بالأمثلة السابقة وجدنا عدداً لا نهائي من القيم الذاتية ونلاحظ أن في كل مثال يمكن ترتيب القيم الذاتية في صورة متتابعة تزايدية مطردة $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ......$

بحيث $\lambda_n \to +\infty$ عندما $n \to +\infty$.

وهذا الجدل يقودنا إلى النظرية التالية :

نظرية :

في مسائل شترم – ليوفيل (1) و (2) يكون لدينا :

(I) يوجد عدد لا نهائي من القيم الذاتية $\lambda_n, \ n = 1,2,3,....$ ، للمسألة المعطاة ، ويمكن ترتيبها على شكل متتابعة تزايدية مطردة

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ......$$

بحيث إن $\lambda_n \to +\infty$ عندما $n \to +\infty$

(II) طبقاً لكل قيمة λ_n ، $n=1,2,3,...$ يوجد عائلة بارامتر واحد للدوال المميزة Φ_n . وكل من هذه الدوال المميزة معرفة على $a \le x \le b$ ، وأن أي دالتين مميزتين مناظرة لنفس القيمة الذاتية تكون إحداهما مضاعفة للأخرى.

(III) كل دالة ذاتية Φ_n مناظرة للقيم الذاتية λ_n و $n=1,2,3,...$ لها أصفار عددها $(n-1)$ في الفترة $a<x<b$.

ملحوظة: في المثال (٢) نلاحظ تحقق النتيجتين (I) و (II). من النظرية والقيم الذاتية اللانهائية $\lambda_n = n^2$ ، $n=1,2,3,....$ يمكن ترتيبها في متتابعة تزايدية مطردة لا نهائية أي $1<4<9<16<25<......$

وان الدوال الذاتية المناظرة $c_n \sin(nx)$ و $c_n \neq 0$ المناظرة لقيم $\lambda_n = n^2$ و $n=1,2,3,...$ لها الخاصية المشار إليها.

وفي النتيجة (III) من النظرية نجد ان كل دالة ذاتية $c_n \sin(n\pi)$ ، $c_n \neq 0$ مناظرة إلى $\lambda_n = n^2$ و $n=1,2,3,...$ لها بالتمام $(n-1)$ صفر في الفترة $0<x<\pi$ ، ونعرف أن $\sin(nx)=0$ إذا و فقط إذا كان $nx=k\pi$ حيث k عدد صحيح وبالتالي أصفار $c_n \sin(nx)$ هي

$$x=\frac{k\pi}{n} \quad , k=0,\pm1,\pm2,\pm3,... \qquad (٢٠)$$

والأصفار في (٢٠) التي تقع في الفترة المفتوحة $0<x<\pi$ هي المناظرة لقيم $(n-1)$ و $n=1,2,3,...$ وهذا يؤكد النتيجة (III) من النظرية أي ان كل دالة ذاتية $c_n \sin(nx)$ لها $(n-1)$ صفر في الفترة المفتوحة .

تمارين

أوجد القيم والدوال الذاتية لمسائل شتورم - ليوفيل التالية :

$$i)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$ii)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(L)=0,\ L>0$$

$$iii)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(\pi)-y'(\pi)=0$$

$$iv)\ \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad y(0)-y'(0)=0, \quad y(\pi)-y'(\pi)=0$$

$$v)\ \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\lambda}{x}y=0, \qquad y(1)=0, \quad y(e^{\pi})=0$$

$$vi)\ \frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\lambda}{x}y=0, \qquad y(1)=0, \quad y'(e^{\pi})=0$$

$$vii)\ \frac{d}{dx}\left[(x^2+1)\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\lambda}{x^2+1}y=0, \qquad y(0)=0, \quad y(1)=0$$

[تنويه: ضع $x=\tan t$].

ملحق

ملحـــق

أولاً : دالة جاما Gamma Function

تعرف هذه الدالة بالتكامل

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (1)$$

حيث x عدد حقيقي (وقد يكون عدد مركب ويحقق $\operatorname{Re} z > 0$)

وعندما $x = 1$ تؤول المعادلة (1) إلى

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \qquad (2)$$

وبإجراء تكامل المعادلة (1) بالتجزئي نحصل على

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^{x} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

ومنها نجد أن

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (3)$$

وبوضع $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ في المعادلة (3) نحصل على

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3! \qquad (4)$$

....

وهكذا

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

حيث n عدد صحيح

أما إذا كانت n عدد غير صحيح فإننا نستخدم (3) مع العلم بأن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ومن ذلك يمكن حساب

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

والعملية العكسية أيضاً :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

وهكذا

ومن السهولة التأكد من أن

$$\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\ldots\ldots=\Gamma(-n)=\infty$$

حيث n عدد صحيح .

وترتبط دالة جاما بالعلاقات التالية

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(2x)$$

ثانيا : دالة بيتا : Beta Function

تعرف هذه بالتكامل

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\ ,(\operatorname{Re} p>0\ ,\ \operatorname{Re} q>0) \qquad (5)$$

وترتبط بالعلاقات التالية

$(i)\ B(p,q)=B(q,p)$

$(ii)\ B(p,q)=\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,/\,\Gamma(p+q)$

$(iii)\ B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$

واذا وضعنا $x=\sin^2\theta$ في (5) نحصل على

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\,\cos^{2q-1}d\,\theta$$

المراجع

المراجـــع

أولاً : المراجع الأجنبية :

(1) M.D. Raisinghania : Advanicd Differential Equations. S. Chand and Company Ltd, India 1991.

(2) E.D Rainville and P. Bedient : Elementary Diffierential Equations. Macmillan Pub. Co. New York, 1980.

(3) M. Rao: Ordinary Differential Equations John Wiley and Sons. N.Y 1989.

(4) S. Ross : Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons. N.Y 1990.

ثانياً : المراجع العربية :

(٥) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم) الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د . حسن العويضي ، د . عبد الوهاب عباس (٢٠٠١) القاهرة .

(٦) نظريات المعادلات التفاضلية د . رحمة عبد الكريم ، مطبوعات جامعة الملك سعود ، ١٤٠٨هـ .

(٧) نظريات ومسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم) فرانك أيرز ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ١٩٩٧م .

(٨) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الأول : د . حسن العويضي – د . عبد الوهاب عباس ، د . سناء علي زارع ، دار الرشد ، ٢٠٠٥ .